14 octobre 2019

Corrigé partiel pour « Formules trigonométriques »

Exercice 1 : Formules trigonométriques (I)
Calculer les valeurs exactes des quantités suivantes :

1. $\cos(\pi/12)$
2. $\sin(11\pi/12)$
3. $\cos(\pi/8)$
4. $\sin(7\pi/8)$

Correction
$\pi/12$ est le demi-angle de $\pi/6$ (valeur remarquable). De même $\pi/8$ est le demi-angle de $\pi/4$ (valeur remarquable). On va donc utiliser des formules de demi-angle pour répondre aux questions. On rappelle

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$$

1. $\cos(\pi/12)$ est positif. D'après la formule sur les angles doubles $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$:
$$\cos(\pi/12) = \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/6)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{3}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}}$$

2. $\sin(11\pi/12) = \sin(\pi - 11\pi/12) = \sin(\pi/12)$. De plus $\sin^2(\pi/12) + \cos^2(\pi/12) = 1$. On a donc :
$$\sin(11\pi/12) = \sin(\pi/12) = \sqrt{1-\cos^2(\pi/12)} = \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}}$$

3. Comme pour la question 1, $\cos(\pi/8)$ est positif et on utilise l'égalité $\cos(2a) = 2\cos^2(a) - 1$ qui donne
$$\cos(\pi/8) = \sqrt{\frac{1+\cos(\pi/4)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$$

4. Comme pour la question 2, on observe que $\sin(7\pi/8) = \sin(\pi/8) > 0$ et on utilise l'égalité $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$.
$$\sin(7\pi/8) = \sin(\pi/8) = \sqrt{1-\cos^2(\pi/8)} = \sqrt{1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

Exercice 2 : Formules trigonométriques (II)
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les (in)équations suivantes

1. $\cos(x) + \sin(x) \geq 1$
2. $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) \geq 1$
3. $\cos(2x) + 2\sin(x) = 0$
4. $\sin(2x) - 2\sin(x) = 0$
5. $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$
6. $\cos(3x) - \sin(2x) = 0$ [difficile]

Correction

Pour tous ces exercices, il faut utiliser des formules de factorisation..

1. On a une expression de la forme $a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $a = b = 1$. On la met sous forme $R\cos(x-\psi)$ en posant $R = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}$ et en cherchant ψ tel que $\cos(\psi) = a/R = 1/\sqrt{2}$ et $\sin(\psi) = b/R = 1/\sqrt{2}$. $\psi = \pi/4$ convient. On a donc
$$\cos(x) + \sin(x) \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos(x-\pi/4) \geq 1 \Leftrightarrow \cos(x-\pi/4) \geq 1/\sqrt{2}$$
Comme $\cos$ est 2π-périodique, il suffit de résoudre l'inéquation sur $[-\pi,\pi]$. Un tableau de variation (ou un dessin) montre que la solution de l'inéquation sur $[-\pi,\pi]$ est $(x-\pi/4) \in [-\pi/4, \pi/4]$, c'est à dire $x \in [0, \pi/2]$. On en conclut $\cos(x)+\sin(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \in [0,\pi/2]+k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
2. Comme pour la question 1, on factorise l'expression $\cos(x)+\sqrt{3}\sin(x)$ sous la forme $R\cos(x-\psi)$ en posant $R = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$ et en cherchant ψ tel que $\cos(\psi) = a/R = 1/2$ et $\sin(\psi) = b/R = \sqrt{3}/2$. $\psi = \pi/3$ convient. On a donc
$$\cos(x) + \sin(x) \geq 1 \Leftrightarrow 2\cos(x-\pi/3) \geq 1 \Leftrightarrow \cos(x-\pi/3) \geq 1/2$$
Comme $\cos$ est 2π-périodique, il suffit de résoudre l'inéquation sur $[-\pi,\pi]$. Un tableau de variation (ou un dessin) montre que la solution de l'inéquation sur $[-\pi,\pi]$ est $(x-\pi/3) \in [-\pi/3, \pi/3]$, c'est à dire $\pi \in [0, 2\pi/3]$. On en conclut $\cos(x) + \sqrt{3}\sin(x) \geq 1 \Leftrightarrow x \in [0, 2\pi/3] + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
3. Dans cette question, on essaie de tout exprimer en fonction de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$.
$$\begin{aligned}\cos(2x) + 2\sin(x) = 0 &\Leftrightarrow (\cos^2(x) - \sin^2(x)) + 2\sin(x) = 0\\ &\Leftrightarrow (1 - 2\sin^2(x)) + 2\sin(x) = 0\\ &\Leftrightarrow -2\sin^2(x)) + 2\sin(x) + 1 = 0\end{aligned}$$
On pose $\sin(x) = X$ et on cherche à résoudre l'équation de degré 2 $-2X^2 + 2X + 1 = 0$. En calculant le discriminant, on trouve que les solutions sont $X_1 = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $X_2 = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ et on est ramené à résoudre $\sin(x) = X_1$ et $\sin(x) = X_2$. $X_2 > 1$ donc l'équation $\sin(x) = X_2$ n'a pas de solution. $X_1 \in [-1,1]$ donc l'équation $\sin(x) = X_1$ a une infinité de solutions. Comme X_1 n'est pas un $\sin$ remarquable, on passe par la fonction $\arcsin$
$$\sin(x) = X_1 \Leftrightarrow \sin(x) = \sin(\arcsin(X_1)) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin(X_1) + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi - \arcsin(X_1) + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$
. En notant $\theta = \arcsin\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$, les solutions de l'équation sont donc $\{\theta+2k\pi, \pi-\theta+2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$

4. Même méthode que pour la question 3, on exprime tout en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

$$\sin(2x) - 2\sin(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x) = 0 \Leftrightarrow 2\sin(x)(\cos(x) - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 1 \\ \sin(x) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 + 2k\pi \\ x = \pi/2 + k\pi \end{cases}$$

Les solutions sont donc $x \in \{\pi/2 + k\pi, 2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$

5. Idem, on exprime tout en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos(x) - \sin(x)\sin(2x) \\ &= (\cos^2(x) - \sin^2(x))\cos(x) - \sin(x)(2\sin(x)\cos(x)) \\ &= \cos(x)[\cos^2(x) - \sin^2(x) - 2\sin^2(x)] = \cos(x)[1 - 4\sin^2(x)] \\ &= \cos(x)[4\cos^2(x) - 3]\end{aligned}$$

On aurait aussi pu utiliser les formules d'Euler et de Moivre pour obtenir ce résultat (cours sur les complexes). On a de même $\cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1$ et donc

$$\begin{aligned}\cos(3x) + \cos(2x) + \cos(x) &= \cos(x)[4\cos^2(x) - 3] + [2\cos^2(x) - 1] + \cos(x) \\ &= 4\cos^3(x) + 2\cos^2(x) - 2\cos(x) - 1\end{aligned}$$

En posant $X = \cos(x)$, on est donc amené à chercher les solutions (dans $[-1, 1]$ de l'équation $4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = 0$ dont une solution simple est $-1/2$. On cherche à factoriser le polynôme sous la forme

$$\begin{aligned}4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 &= (X + 1/2)(aX^2 + bX + c) \\ &= aX^3 + (a/2 + b)X^2 + (c + b/2)X + c/2\end{aligned}$$

Par identification des coefficients,

$$\begin{cases} a = 4 \\ a/2 + b = 2 \\ c + b/2 = -2 \\ c/2 = -1 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 0 \\ c = -2 \end{cases}$$

et on a donc $4X^3+2X^2-2X-1 = (X+1/2)(4X^2+2) = 4(X+1/2)(X^2-1/2)$. Le trinôme $X^2-)1/2$ a deux racines réelle $X = \{-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\}$. L'équation $4X^3 + 2X^2 - 2X - 1 = 0$ a donc 3 solutions

$$X = \left\{-\sqrt{\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Il ne reste plus pour conclure qu'à résoudre $\cos(x) = X$

— $\cos(x) = -1/2$ dont les solutions sont $x = \pm 2\pi/3 + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

— $\cos(x) = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ dont les solutions sont $x = \frac{\pi}{4} + k\pi/2$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

6. On cherche à tout exprimer en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. D'après la question précédente, $\cos(3x) = \cos(x)[1 - 4\sin^2(x)]$ et les formules du cours donnent $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$. On a donc :

$$\cos(3x) - \sin(2x) = \cos(x)[1 - 4\sin^2(x)] - 2\sin(x)\cos(x) = \cos(x)[1 - 2\sin(x) - 4\sin^2(x)]$$

qui s'annule si $\cos(x) = 0$ (c'est à dire $x = \pi/2 + k\pi$) ou si $1 - 2\sin(x) - 4\sin^2(x) = 0$. On est donc amené à résoudre l'équation de second degré $1 - 2X - 4X^2 = 0$ dont les solutions sont $X_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $X_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4}$ puis les équations $\sin(x) = X_1$ et $\sin(x) = X_2$. Comme X_1 et X_2 sont dans $[-1, 1]$, ces deux équations ont des solutions. Au final, en raisonnant comme précédemment et en notant $\theta_1 = \arccos\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{4}\right)$ et $\theta_2 = \arccos\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{4}\right)$, on trouve les solutions suivantes :

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \theta_1, -\theta_1, \theta_2, -\theta_2\right\} + 2k\pi \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

7.

Exercice 3 : Tangente

Donner le nombre de solutions dans $[0, \pi]$ de l'équation

$$\tan(x) + \tan(2x) + \tan(3x) + \tan(4x) = 0$$

Exercice 4 : Fonctions trigonométriques réciproques

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (sauf mention explicite du contraire) les équations trigonométriques suivantes :

1. $10\cos(8\theta) = -5$
2. $2\sin(\theta/4) = \sqrt{3}$
3. $2\sin(\theta/4) = \sqrt{3}$ dans $[0, 16\pi]$
4. $10 + 7\tan(4\theta) = 3$ dans $[-\pi, 0]$.
5. $3 - 4\sin(4\theta) = 5$ dans $[-3\pi/2, -\pi/2]$
6. $2\cos^2(x) - 3\cos(x) + 1 = 0$ dans $[0, 2\pi]$

Correction

Les questions 1 à 5 sont corrigés dans la feuille d'exercice précédente. On reprend celle de la question 4 à titre illustratif et on donner celle de la question 6 ensuite

Correction de $10 + 7\tan(4\theta) = 3$ **dans** $[-\pi, 0]$ On raisonne par équivalence

$$\begin{aligned} 10 + 7\tan(4\theta) = 3 &\Leftrightarrow \tan(4\theta) = -1 \\ &\Leftrightarrow \tan(4\theta) = \tan(-\pi/4) \\ &\Leftrightarrow 4\theta = -\pi/4 + k\pi \\ &\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

On cherche ensuite les solutions qui sont dans $[-\pi, 0]$. Par exemple, $-\frac{\pi}{16}$ est solution. Comme toutes les solutions sont "décalées" de $\pi/4$, il suffit de lui ajouter $\pi/4$ jusqu'à être plus grand que 0 et de lui retrancher $\pi/4$ jusqu'à être plus petit que $-\pi$. Au final, on trouve que les solutions sont

$$x \in \left\{-\frac{\pi}{16}, -\frac{5\pi}{16}, -\frac{9\pi}{16}, -\frac{13\pi}{16}\right\}$$

Correction de $2\cos^2(x)-3\cos(x)+1=0$ **dans** $[0,2\pi]$ On pose $X=\cos(x)$ et on se ramène à l'équation de second degré $2X^2-3X+1=0$ dont les solutions sont $X_1=-1$ et $X_2=-1/2$. Les deux valeurs sont dans $[-1,1]$ dont leur $\arccos$ sont bien définis.

$$\begin{cases}\cos(x) & =-1\\ \text{OU} & \\ \cos(x) & =-1/2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & =\pi+2k\pi\\ \text{OU} & \\ x & =2\pi/3+2k\pi\\ \text{OU} & \\ x & =-2\pi/3+2k\pi\end{cases}$$

En conservant uniquement les solutions dans $[0,2\pi]$, on obtient

$$x\in\left\{\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3}\right\}$$

Exercice 5 : Inéquations

Résoudre dans $\mathbb{R}$ (sauf mention explicite du contraire) les équations suivantes :

1. $|\cos(x)|\geq|\sin(x)|$
2. $\ln(\cos^2(x))=0$
3. $2\ln(\cos(x))=0$
4. $\sqrt{1-\cos^2(x)}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. $e^{\cos(x)}\leq 1$

Correction

1. Par 2π-périodicité, on peut se limiter à $x\in[0,2\pi]$. De plus, comme $|\cos(x+\pi)|=|-\cos(x)|=|\cos(x)|$ et de même pour $|\sin|$, la fonction $|\cos(x)|-|\sin(x)|$ est en fait π-périodique et on peut donc se limiter à $x\in[-\pi/2,\pi/2]$. On cherche ensuite à se débarrasser des valeurs absolues en distinguant 2 cas.
   Premier cas : $\mathbf{x\in[0,\pi/2]}$ Sur cet intervalle, l'inégalité se réduit à (E_1)

   $$|\cos(x)|\geq|\sin(x)|\Leftrightarrow\cos(x)\geq\sin(x)\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos(x+\pi/4)\geq 0$$

   En faisant (par exemple) une étude de signe de $\cos(x+\pi/4)$ sur $[0,\pi/2]$, on trouve que les solutions de (E_1) sont $x\in[0,\pi/4]$.

   Second cas : $\mathbf{x\in[-\pi/2,0]}$ Sur cet intervalle, l'inégalité se réduit à (E_2)

   $$|\cos(x)|\geq|\sin(x)|\Leftrightarrow\cos(x)\geq-\sin(x)\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos(x-\pi/4)\geq 0$$

   En faisant (par exemple) une étude de signe de $\cos(x-\pi/4)$ sur $[-\pi/2,0]$, on trouve que les solutions de (E_2) sont $x\in[-\pi/4,0]$.

   En recollant les morceaux et en utilisant la π-périodicité, on montre que l'ensemble des solutions est $[-\pi/4,\pi/4]+k\pi$
2. On raisonne par équivalence.

   $$\ln(\cos^2(x))=0\Leftrightarrow\cos^2(x)=1\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(x)=1\\ \cos(x)=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\ [2\pi]\\ x=\pi\ [2\pi]\end{cases}$$

   L'ensemble des solutions est donc $\{k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$

3. On raisonne par équivalence.

$$2\ln(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \ln(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x = 0\ [2\pi]$$

L'ensemble des solutions est donc $\{2k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$
Remarque Notez que l'ensemble solution n'est pas le même que dans la question précédente alors qu'on pourrait naïvement penser que $\ln(\cos^2(x)) = 2\ln(\cos(x))$. C'est évidemment faux dès que $\cos(x) < 0$: le deuxième membre n'est alors pas défini... Et la bonne égalité est en fait $\ln(\cos^2(x)) = 2\ln(\sqrt{\cos^2(x)}) = 2\ln|\cos(x)|$.

4. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\cos^2(x)} = \frac{\sqrt{3}}{2} &\Leftrightarrow \sqrt{\sin^2(x)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow |\sin(x)| = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases}\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi/3\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = 2\pi/3\ [2\pi]\\ x = -\pi/3\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad x = -2\pi/3\ [2\pi]\end{cases}\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\pm\pi/3 + k\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

5. On raisonne par équivalence.

$$e^{\cos(x)} \leq 1 \Leftrightarrow \cos(x) \leq 0$$

Comme $\cos$ est paire et 2π-périodique et paire, on se contente de résoudre l'équation sur $[0,\pi]$. Sur $[0,\pi]$, on montre avec l'aide d'un dessin ou d'un tableau de variation que $\cos(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [\pi/2,\pi]$. Par parité, la solution sur $[-\pi,\pi]$ est $[-\pi,-\pi/2] \cup [\pi/2,\pi]$ qui s'étend par périodicité à $[-\pi+2k\pi, -\pi/2+2k\pi] \cup [\pi/2+2k\pi, \pi+2k\pi]$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) qui peut se réécrire plus simplement $\left\{\left[\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{3\pi}{2}+k\pi\right]\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$

Exercice 6 : arcsin

On cherche à calculer $X = \arcsin\left(-\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}}\right)$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$
2. Appliquer la formule précédente à $x = \frac{\pi}{8}$.
3. En déduire la valeur de X.
4. Vérifier que vous n'avez pas fait de fautes, par exemple avec une calculatrice.

Correction sur demande, si vous me montrez que vous avez cherché

Exercice 7 : Produit de cosinus

Soit $a \in (0,\pi)$. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$$

On pourra utiliser $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$. En déduire

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)\right)$$

Correction sur demande, si vous me montrez que vous avez cherché