14 octobre 2019

Exercices « Limites, Dérivées et DLs »

Exercice 1 : Limite

- En utilisant des calculs d'aires, montrer que $\forall x \in [0, \pi/2[, \sin(x) \leq x \leq \tan(x)$ puis que $\forall x \in]-\pi/2, 0], \tan(x) \leq x \leq \sin(x)$
- En déduire que $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$ (avec le théorème d'encadrement)

Correction sur demande si vous me montrez que vous avez cherché

Exercice 2 : A propos de x^n

Soit x, a deux nombres réels et $n \in \mathbb{N}^*$ un nombre entier non nul.

- Montrer que $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-3}x^2 + a^{n-2}x + a^{n-1})$
- En déduire $\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}$ (on retrouve de cette façon la dérivée de la fonction $x \mapsto x^n$ au point a)

Correction Il s'agit d'une généralisation de l'égalité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. On peut la montrer directement :

$$\begin{aligned}(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}) =& x^n + ax^{n-1} + \cdots + a^{n-1}x \\ & - ax^{n-1} - \cdots - a^{n-1}x - a^n \\ =& x^n - a^n\end{aligned}$$

ou s'habituer à manipuler des sommes puisque $x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i}$ et donc

$$\begin{aligned}(x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}) &= (x-a)\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i} \\ &= x\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i} - a\sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i} - \sum_{i=0}^{n-1} a^{i+1} x^{n-1-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} a^i x^{n-i} - \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a^j x^{n-j}}_{j=i+1} \\ &= \underbrace{a^0 x^{n-0}}_{i=0} + \sum_{i=1}^{n-1} a^i x^{n-i} - \sum_{j=1}^{n-1} a^j x^{n-j} - \underbrace{a^n x^{n-n}}_{j=n} \\ &= a^n - x^n\end{aligned}$$

la deuxième méthode est plus longue mais reprend exactement le principe de la première, j'ai juste détaillé les étapes.

Une fois l'égalité obtenue, on peut finir l'exercice par théorème d'opération :

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \underbrace{x^{n-1}}_{\xrightarrow[x\to a]{} a^{n-1}} + \underbrace{ax^{n-2}}_{\xrightarrow[x\to a]{} a^{n-1}} + \cdots + \underbrace{a^{n-2}x}_{\xrightarrow[x\to a]{} a^{n-1}} + a^{n-1} \xrightarrow[x\to a]{} na^{n-1} \quad (1)$$

Exercice 3 : Limites et Dérivées
En utilisant les dérivées, démontrer les limites suivantes :
— $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
— $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
— $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

Correction dans le cours sur les dérivées

Exercice 4 : Théorèmes d'opérations
En utilisant les théorèmes d'opérations sur les limites, montrer que :
1. $\lim\limits_{x\to\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = +\infty$
3. $\lim\limits_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x}{e^{x^2}-1} = +\infty$
5. $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = +\infty$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2)} = +\infty$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ba}$ pour tout $a, b > 0$.

Correction
1. On a un mélange de puissance et d'exponentielle mais avec des racines dans l'exponentielle. On va essayer d'utiliser le théorème de croissance comparée en se ramenant à une forme classiques. On pose $X = \sqrt{x}$. Par composition :
$$\lim_{x\to+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = \underbrace{\lim_{X\to+\infty} X^8 e^{-X} = 0}_{\text{croissance comparée}}$$
2. On a un mélange de puissance et d'exponentielle mais avec des carrés dans l'exponentielle. On va essayer d'utiliser le théorème de croissance comparée en se ramenant à une forme classiques. On pose $X = x^2$. Par composition :
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(2x^2)}{x^4} = \underbrace{\lim_{X\to+\infty} X^{-2} e^{2X} = +\infty}_{\text{croissance comparée}}$$

3. Comme $1/x$ est *petit* quand x est grand, on se ramène à une limite usuelle avec $\ln$ en posant $X = 1/x$. Par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \underbrace{\lim_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1}_{\text{limite usuelle}}$$

4. Comme x^2 est *petit* quand x est petit, on essaie de se ramener à une limite usuelle avec $\exp$ en faisant apparaître du x^2 dans le numérateur.

$$\frac{x}{e^{x^2}-1} = \frac{1}{x}\frac{x^2}{e^{x^2}-1} = \frac{1}{x}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{-1}$$

La limite de $1/x$ en 0^+ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x^2$ puis par composition :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{x^2}-1}{x^2} = \underbrace{\lim_{X\to0^+}\frac{e^X-1}{X} = 1}_{\text{limite usuelle}}$$

En utilisant les théorèmes d'opérations :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{e^{x^2}-1} = \lim_{x\to0^+}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2}\right)^{-1} = +\infty\times1 = +\infty$$

5. Là encore, comme $1/x\sqrt{x}$ est petit, on force l'apparition d'une limite classique :

$$x^2\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}\times x\sqrt{x}\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)$$

La limite de $\sqrt{x}$ en $+\infty$ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x\sqrt{x}$ puis par composition :

$$\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \underbrace{\lim_{X\to0^+}\frac{\ln(1+X)}{X} = 1}_{\text{limite usuelle}}$$

En utilisant les théorèmes d'opérations :

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\times\lim_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\ln\left(1+\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) = +\infty\times1 = +\infty$$

6. Comme x^2 est *petit* quand x est petit, on essaie de se ramener à une limite usuelle avec $\sin$ en faisant apparaître du x^2 dans le numérateur.

$$\frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2} = \frac{2}{x\sqrt{x}}\times\frac{x^2}{\sin(x^2)} = \frac{2}{x\sqrt{x}}\times\left(\frac{\sin(x^2)}{x^2}\right)^{-1}$$

. La limite de $2/x\sqrt{x}$ en 0^+ ne pose pas de problème. Pour le deuxième terme, on pose $X = x^2$ puis par composition :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{\sin(x^2)} = \left(\lim_{X\to0^+}\frac{\sin(X)}{X}\right)^{-1} = 1$$

En utilisant les théorèmes d'opérations :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\sqrt{x}}{\sin(x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{x\sqrt{x}} \times \lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{\sin(x^2)} = +\infty \times 1 = +\infty$$

7. cf question suivante avec $a = b = 1$
8. Il s'agit d'une forme indeterminée du type 1^∞. On passe sous forme exponentielle :

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = \exp\left(bx\ln(1+a/x)\right)$$

et on étudie la limite en $+\infty$ de $bx\ln(1+a/x)$. Comme pour les exercices précédents, on force l'apparition d'une limite classique en posant $X = a/x$.

$$\lim_{x\to+\infty} bx\ln(1+a/x) = \lim_{X\to 0^+} ba\frac{\ln(1+X)}{X} = ba$$

Par composition, on en déduit

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} = \lim_{X\to ba} e^X = e^{ba}$$

Exercice 5 : Théorèmes d'opérations (bis)
Montrer les limites suivantes

$$\lim_{+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{-\infty} e^{3x^2}/x^5 = +\infty \qquad \lim_{+\infty} x\ln(1+1/x) = 1$$

$$\lim_{0+} \frac{\ln(1+4x)}{x} = 4 \qquad \lim_{0+} \frac{\ln(1+x^2)}{x\sqrt{x}} = 0 \qquad \lim_{0+} \frac{x}{e^{x^2}-1} = +\infty$$

$$\lim_{0+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1} = 1 \qquad \lim_{0+} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x} = 0 \qquad \lim_{0+} \frac{x}{2}\left\lfloor\frac{3}{x}\right\rfloor = \frac{3}{2}$$

$$\lim_{1} \frac{x^n-1}{x^p-1} = \frac{n}{p} \qquad \lim_{0} \frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{0+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \qquad \lim_{+\infty} x^3\ln(1+1/x\sqrt{x}) = +\infty \qquad \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{1}{2}$$

Correction Les limites 1, 2, 3 et 7 ont été vues en classe. Les limites 6, 12 sont corrigées dans l'exercice précédent et la limite 14 se démontre comme la limite 5 de l'exercice précédent. On se contente de corriger les autres, en faisant apparaître à chaque fois une limite usuelle.

limite 4 On se ramène à la limite $\ln(1+x)/x$ en 0 en posant $X = 4x$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+4x)}{x} = \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X/4} = 4\lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 4$$

limite 5 On se ramène à la limite $\ln(1+x)/x$ en 0 (et des termes supplémentaires qui ne posent pas de problèmes) en posant $X = x^2$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x^2)}{x\sqrt{x}} = \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X/X^{-1/4}} = \lim_{X\to 0^+} X^{1/4} \times \lim_{X\to 0^+} \frac{\ln(1+X)}{X} = 0\times 1 = 0$$

limite 8 On peut décomposer l'expression en termes qui ne posent pas problèmes :

$$\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x} = 1 - \underbrace{(1+x)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \underbrace{\frac{\ln(1+x)}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1}$$

On conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x} = 1 - 1\times 1 = 0$$

limite 9 On revient à la définition de la partie entière :

$$\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{x} < \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor + 1 \Leftrightarrow \frac{3}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{x}$$

Comme on cherche la limite en 0^+, on peut se restreindre à $x > 0$ (et donc $x/2 > 0$). On a alors :

$$\frac{x}{2}\left(\frac{3}{x} - 1\right) < \frac{x}{2}\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{x}{2}\frac{3}{x} \Rightarrow \underbrace{\frac{3}{2} - \frac{x}{2}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{3}{2}} < \frac{x}{2}\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor \leq \frac{3}{2}$$

Et on conclut par théorème d'encadrement.

limite 10 On s'appuit sur l'égalité de l'exercice 2 : $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)$ qui permet de réécrire l'expression :

$$\frac{x^n - 1}{x^p - 1} = \frac{(x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1)}{(x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1)} = \frac{x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1}{x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1}$$

et de lever l'indétermination. En effet :

$$\lim_{x\to 1} x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = n$$
$$\lim_{x\to 1} x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p \text{ fois}} = p$$

Et on conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x^p - 1} = \frac{n}{p}$$

limite 11 Comme pour la limite 7, on commence par se débarasser des racines en passant par les radicaux conjugués :

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} &= \frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)}\frac{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}\\
&= \frac{\cos^2(x)-\cos(2x)}{\sin^2(x)}\frac{1}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}\\
&= \frac{\cos^2(x)-(\cos^2(x)-\sin^2(x))}{\sin^2(x)}\frac{1}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}\\
&= \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)}\frac{1}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}\\
&= \frac{1}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}}
\end{aligned}$$

pour aboutir à une forme qui n'est plus indeterminée. On conclut

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)+\sqrt{\cos(2x)}} = \frac{1}{2}$$

limite 13 Il ne s'agit pas d'une forme indeterminée. Par théorème d'opération :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\ln(x)\times\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = -\infty\times+\infty = -\infty$$

limite 15 Il s'agit d'une forme indéterminée du style $\infty-\infty$. On se débarasse des racines en multipliant par les radicaux conjugués :

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1}-x &= \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}\\
&= \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}
\end{aligned}$$

On factorise ensuite par le monôme en x de plus haut degré en haut et en bas :

$$\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} = \frac{\overbrace{1+\frac{1}{x}}^{\xrightarrow{x\to+\infty}1}}{\underbrace{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}1}+1}$$

On conclut par théorème d'opération :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Pour les braves

Les exercices qui suivent sont difficiles (calculatoire et/ou abstraits) dans l'état de vos connaissances. Les deux premiers seront bien plus faciles une fois qu'on aura vu les développements limités (en fin de semestre), le dernier fait appel à la définition formelle de la limite (avec des quantificateurs). Ils sont conseillés à ceux qui veulent aller plus loin et peuvent être résolus dès maintenant mais la correction proposée utilise les développements limités.

Exercice 6 : Limites en 0
Calculer les limites des fonctions suivantes en 0 (en distinguant limite à gauche et à droite quand nécessaire).

$$\begin{array}{c||l}
\dfrac{1}{x(x-1)} - \dfrac{1}{x} & \dfrac{\sqrt{x^2}}{x} \\
\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} & \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1} \\
(\ln(e+x))^{1/x} & \tan(x)\ln(\sin(x)) \\
\dfrac{\sin(x)^x - 1}{x^x - 1} & \left(x\cos\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)\right)^{x/(x^2+2)} \\
\dfrac{e^{1/(x^2+1)} - e^{e^x}}{\sqrt[3]{1+x}-1} &
\end{array}$$

Correction Les limites sont numérotées de haut en bas, puis de gauche à droite.

Limite 1 On n'a pas réellement besoin de DL pour déterminer cette limite, il suffit de réduire les termes au même dénominateur avant de simplifier l'expression

$$\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{x(x-1)} - \frac{x-1}{x(x-1)} = \frac{2-x}{x(x-1)} = \underbrace{\frac{2-x}{x-1}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} -2} \times \frac{1}{x}$$

On peut conclure par théorème d'opération

$$\lim_{0^-} \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} = -2 \times \lim_{0^-} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{0^+} \frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x} = -2 \times \lim_{0^+} \frac{1}{x} = -\infty$$

Limite 2 Le $DL_1(0)$ de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ nous donne $\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + o(x)$ d'où on déduit par théorème de composition que $\sqrt{1+x^2} = 1 + x^2/2 + o(x^2)$. En substituant dans la limite de départ, on obtient

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1} = \frac{x^2}{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1} = \frac{x^2}{\frac{x^2}{2}+o(x^2)} = \frac{1}{1+o(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Limite 3 On raisonne par étapes en se ramenant à des DLs connus. On commence par se ramener au DL en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$ en factorisant par e dans le logarithme.

$$\ln(e+x) = \ln(e(1+x/e)) = \ln(e) + \ln(1+x/e) = 1 + \frac{x}{e} + o(x)$$

On passe ensuite en forme exponentielle et on réutilise le DL en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$ avant de conclure.

$$
\begin{aligned}
(\ln(e+x))^{1/x} &= \left(1+\frac{x}{e}+o(x)\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{\ln(1+\frac{x}{e}+o(x))}{x}\right) \\
&= \exp\left(\frac{\frac{x}{e}+o(x)}{x}\right) = \exp\underbrace{\left(\frac{\frac{1}{e}+o(1)}{1}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{e}} \xrightarrow[x\to 0]{} e^{\frac{1}{e}}
\end{aligned}
$$

Limite 4 On commence par faire un DL en 0 de $x \mapsto \sin(x)^x$ et de $x \mapsto x^x$. Dans les deux cas, on commence par passer sous forme exponentielle pour simplifier les calculs

$$
\begin{aligned}
\sin(x)^x &= \exp(x\ln(\sin(x))) = \exp(x\ln(x+o(x))) = \exp(x[\ln(x)+\ln(1+o(1))]) \\
&= \exp(x[\ln(x)+o(1)]) = \exp(x\ln(x)+o(x))
\end{aligned}
$$

On a bien $o(x) = o(x\ln(x))$ (car $x \ll x\ln(x)$ en 0) et $x\ln(x) \to 0$ quand $x \to 0$ donc on peut utiliser le DL en 0 de $x \mapsto e^x$ pour simplifier l'expression précédente et obtenir

$$\sin(x)^x = 1 + x\ln(x) + o(x\ln(x))$$

Un raisonnement similaire donne

$$x^x = 1 + x\ln(x) + o(x\ln(x))$$

En injectant ces DL dans la limite de départ, on obtient

$$\frac{\sin(x)^x - 1}{x^x - 1} = \frac{1 + x\ln(x) + o(x\ln(x)) - 1}{1 + x\ln(x) + o(x\ln(x)) - 1} = \frac{1+o(1)}{1+o(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Limite 5 Comme pour la question précédente, on cherche un DL en 0 du numérateur et un autre du dénominateur. On commence par le DL du dénominateur. Il s'agit d'un DL en 0 classique : $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} + o(x)$ d'ù on déduit $\sqrt[3]{1+x} - 1 = \frac{x}{3} + o(x)$. Le DL du numérateur est plus compliqué. On s'attaque à chaque terme séparément et on procède par étapes en essayant de se ramener à des DL connus à chaque fois. Pour le premier terme :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2} &= (1+x^2)^{-1} = 1 - x^2 + o(x^2) \\
\exp\left(\frac{1}{1+x^2}\right) &= \exp(1 - x^2 + o(x^2)) = e \times \exp(-x^2 + o(x^2)) = e\left(-x^2 + o(x^2)\right)
\end{aligned}
$$

Pour le deuxième terme :

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + o(x) \\
\exp(e^x) &= \exp(1 + x + o(x)) = e \times \exp(x + o(x)) = e\,(x + o(x))
\end{aligned}
$$

En combinant les deux termes et en simplifiant **correctement** les termes négligeables, on obtient :

$$
\begin{aligned}
e^{\frac{1}{1+x^2}} - e^{e^x} &= e\left(-x^2 + o(x^2)\right) - e\,(x + o(x)) \\
&= e(-x - x^2 + o(x) + o(x^2)) = e(x + o(x))
\end{aligned}
$$

Il suffit ensuite d'injecter dans la limite de départ pour conclure :

$$\frac{e^{1/(x^2+1)} - e^{e^x}}{\sqrt[3]{1+x} - 1} = \frac{e(x+o(x))}{\frac{x}{3} + o(x)} = \frac{e + o(1)}{\frac{1}{3} + o(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} 3e$$

Limite 6 On n'a pas besoin de DL pour cette limite, il faut juste être rigoureux dans les calculs

$$\frac{\sqrt{x^2}}{x} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

D'où on déduit $\lim_{0^-} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = -1$ et $\lim_{0^+} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = +1$

Limite 7 Comme pour les limites précédente, le but est de se ramener à des DL en 0 connus. Le dénominateur ne pose pas de problème : $\sqrt{x+1} - 1 = \frac{x}{2} + o(x)$. Pour chacun des termes du numérateur, le terme dominant dans la racine est 4. On se ramène donc à une expression de la forme $u \mapsto \sqrt{1+u}$ en factorisant par 4 comme suit :

$$\sqrt{x+4} = \sqrt{4\left(1+\frac{x}{4}\right)} = 2\sqrt{1+\frac{x}{4}} = 2\left(1+\frac{x}{8}+o(x)\right) = 2+\frac{x}{4}+o(x)$$
$$\sqrt{3x+4} = 2\sqrt{1+\frac{3x}{4}} = 2\left(1+\frac{3x}{8}+o(x)\right) = 2+\frac{3x}{4}+o(x)$$

En substituant tous ces DLs dans la limite de départ, on obtient :

$$\frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1} = \frac{\frac{x}{4}-\frac{3x}{4}+o(x)}{\frac{x}{2}+o(x)} = \frac{-\frac{1}{2}+o(1)}{\frac{1}{2}+o(1)} \xrightarrow[x\to 0]{} -1$$

Limite 8 Les DLs ne sont pas nécessaires ici. Il suffit de réécrire l'expression pour faire apparaître les termes problématiques :

$$\tan(x)\ln(\sin(x)) = \underbrace{\frac{1}{\cos(x)}}_{\xrightarrow[x\to 0]{} 1} \times \sin(x)\ln(\sin(x))$$

On considère alors le changement de variables $X = \sin(x)$ pour se ramener à une limite du cours. Comme $X \to 0$ quand $x \to 0$, par théorème de composition :

$$\lim_{x\to 0} \sin(x)\ln(\sin(x)) = \lim_{X\to 0} X\ln(X) = 0$$

D'où on conclut $\lim_0 \tan(x)\ln(\sin(x)) = 0$ par théorème d'opérations.

Limite 9 Il s'agit encore d'une fonction complexe au premier abord qu'on va simplifier par étapes à l'aide de développements limités. On commence par la partie en $\cos$ en

$$\frac{x}{x^2+1} = x(1+x^2)^{-1} = x(1-x^2+o(x^2)) = x+o(x)$$
$$\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \cos(x+o(x)) = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$$
$$x\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = x\left(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right) = x+o(x)$$

Puis on passe en forme exponentielle pour gérer la puissance et conclure à l'aide des théorèmes d'opérations.

$$\left(x\cos\left(\frac{x}{x^2+1}\right)\right)^{x/(x^2+2)} = \exp\left(\frac{\overbrace{\ln(x+o(x))}^{\xrightarrow[x\to 0]{} 0}}{x^2+2}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} e^0 = 1$$

Exercice 7 : Limites en $+\infty$

Calculer les limites des fonctions suivantes en $+\infty$. On pourra se ramener à des limites classiques en faisant des changements de variables.

$\sqrt{a+x}-\sqrt{x}$	$\dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}$
$\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}-\dfrac{x}{\sqrt{x+2}}$	$\dfrac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}}$
$x\sin(\pi/x)$	$\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x-2}$
$\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx}$	$\ln(3x^2-4)-\ln(x^2-1)$
$\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$	$\left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x}$
$\left(\dfrac{x+2}{x}\right)^{2x}$	$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}$

Correction Les limites sont numérotées de haut en bas, de gauche à droite. Dans la majorité, le principe est le même, on identifie le terme dominant puis on factorise par le terme dominant pour se ramener à un DL connu (souvent en 0). On détaille les premières limites avant de devenir un peu plus synthétique.

Limite 1 Le terme dominant dans les deux racines est x. On factorise donc par $\sqrt{x}$ pour se ramener à :

$$\sqrt{a+x}-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{a}{x}}-1\right)$$

On peut ensuite poser $X=\frac{a}{x}$. Comme $X\to 0$ quand $x\to\infty$, on peut faire un DL en 0 de $X\mapsto\sqrt{1+X}$ pour écrire $\sqrt{1+\frac{a}{x}}-1=\frac{a}{2x}+o(1/x)$. En injectant dans l'expression précédente, on obtient :

$$\sqrt{a+x}-\sqrt{x}=\sqrt{x}\left(\frac{a}{2x}+o(1/x)\right)=\frac{a}{2\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$$

Limite 2 On pourrait utiliser les radicaux conjugués pour calculer cette limite mais on va passer par les DLs. Le terme dominant de chacune des racines est x. On factorise donc par x dans chacune pour se ramener au DL de $u\mapsto\sqrt{1+u}$ en 0.

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{x+1}}-\frac{x}{\sqrt{x+2}}&=\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-1/2}-\sqrt{x}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{-1/2}\\&=\sqrt{x}\left[1-\frac{1}{2x}-\left(1-\frac{1}{x}\right)+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]\\&=-\frac{1}{2\sqrt{x}}+\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0\end{aligned}$$

Limite 3 On se ramène à un DL en 0 en posant $X=\frac{\pi}{x}$.

$$x\sin(\pi/x)=x\sin(X)=x[X+o(X)]=x\left[\frac{\pi}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right]=\pi+o(1)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\pi$$

Limite 4 On se ramène à un DL en 0 en posant $X = \frac{a}{x}$ en on passe sous forme exponentielle :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx} &= \exp\left(bx\ln(1+X)\right) = \exp\left(bx(X+o(X))\right)\\ &= \exp\left(bx\left(\frac{a}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)\\ &= \exp(ab+o(1)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{ab}\end{aligned}$$

Limite 5 On factorise par le terme dominant x^2 dans la fraction rationelle pour écrire :

$$\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2} = (1-2/x+1/x^2)[1-4/x+2/x^2]^{-1} = 1-2/x+4/x+o(1/x) = 1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On injecte ensuite ce DL dans la limite de départ, on passe sous forme exponentielle et on utilise le DL en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x} &= \exp\left[x\ln\left(1+\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]\\ &= \exp\left[x\left(\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]\\ &= \exp(2+o(1)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{2}\end{aligned}$$

Limite 6 On passe sous forme exponentielle et on utilise le DL en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x} &= \exp\left[2x\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)\right] = \exp\left[2x\left(\frac{2}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right]\\ &= \exp(4+o(1)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^{4}\end{aligned}$$

Limite 7 Il n'y pas vraiment d'indétermination, le terme dominant du dénominateur est x^2 alors que celui du numérateur est au plus x. On peut donc tout de suite conclure que la fonction tend vers 0. On peut néanmoins se demander comment elle tend vers 0. Un DL du numérateur donne :

$$x-\sqrt{x^2+1} = x\left[1-\left(1+\frac{1}{2x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\right] = \frac{1}{2x}(1+o(1))$$

Combiné au DL du dénominateur, on obtient :

$$\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2x^3}(1+o(1)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Limite 8 Comme pour la question précédente, on factorise par x dans chaque racine et on utilise le DL en 0 des fonctions $u \mapsto (1+u)^{\alpha}$.

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x} &= \sqrt[4]{x}\left[1+\frac{1}{4x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right] = \frac{1}{4x^{3/4}}(1+o(1))\\ \sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x} &= \sqrt[3]{x}\left[1+\frac{1}{3x}+o\left(\frac{1}{x}\right)-1\right] = \frac{1}{3x^{2/3}}(1+o(1))\end{aligned}$$

En injectant ces DL dans la fonction de départ, on obtient :

$$\frac{\sqrt[4]{x+1}-\sqrt[4]{x}}{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}} = \frac{\frac{1}{4x^{3/4}}(1+o(1))}{\frac{1}{3x^{2/3}}(1+o(1))} = \frac{3}{4}x^{-1/12}(1+o(1)) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Limite 9 Même mode de résolution que les limites 5 et 6.

$$\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x-2} = \exp\left(\underbrace{(3x-2)}_{=3x(1+o(1))}\underbrace{\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)}_{=\frac{2}{x}(1+o(1)}\right) = \exp\left(6+o(1)\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^6$$

Limite 10 On se ramène au DL en 0 de $u \mapsto \ln(1+u)$.

$$\ln(3x^2-4)-\ln(x^2-1) = \ln\underbrace{\left(\frac{3x^2-4}{x^2-1}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}3} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(3)$$

Limite 11 Cette limite est un peu plus compliquée mais on commence comme d'habitude par passer sous forme exponentielle.

$$\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)\right) = \exp\left(\underbrace{\frac{\ln(\ln(x))}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0} - \underbrace{\frac{\ln(x)}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}0}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} e^0 = 1$$

Limite 12 Le terme dominant dans la première racine est x, on factorise donc par x pour se ramener au DL en 0 en de $u \mapsto \sqrt{1+u}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}} &= \sqrt{x}\sqrt{1+\underbrace{\sqrt{\frac{x}{x^2}+\sqrt{\frac{x}{x^4}}}}_{=u}} = \sqrt{x}\left(1+\frac{u}{2}+o(u)\right) \\ &= \sqrt{x}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right)\end{aligned}$$

En injectant dans la fonction initiale, on obtient :

$$\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right) = \frac{1}{2}+o(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

Exercice 8 : Limite et fonction périodique (difficile)

On considère f une fonction périodique, définie sur $\mathbb{R}$ et ayant une limite finie l en $+\infty$. Montrer que f est constante.

On pourra revenir à la définition avec les quantificateurs pour cet exercice.

Correction sur demande si vous me montrez que vous avez cherché. Correction détaillées quand on fera le cours sur les DLs.