21 octobre 2019

Exercices « Différentielles »

Exercice 1 : Calcul de différentielles
Exprimer dy en fonction de dx quand y et x sont liés par les relations suivantes :

1. $y = ax + b$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$)
2. $y = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$)
3. $y = \ln(x)$
4. $y = e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
5. $y = x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$), on pourra écrire $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$

Exercice 2 : "Intégration" de différentielles
A partir des relations différentielles suivantes, proposer une relation entre y et x :

1. $dy = 5dx$
2. $dy = nx^{n-1}dx$
3. $dy = \frac{dx}{x}$
4. $dy = \alpha e^{\alpha x}dx$
5. $dy = \cos(x)dx$
6. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ **(difficile)**

Exercice 3 : Dérivées de fonctions composées (I)
Calculer les dérivées suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}(\tan(\alpha))}{\mathrm{d}\alpha} \qquad \frac{\mathrm{d}[1/\cos(\alpha)]}{\mathrm{d}\alpha}$$
$$\frac{\mathrm{d}[1/\sin(\alpha)]}{\mathrm{d}\alpha} \qquad \frac{\mathrm{d}[1/\tan(\alpha)]}{\mathrm{d}\alpha}$$

Exercice 4 : Dérivées de fonctions composées (II)
Calculer les dérivées suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}[u\ln(u) - u]}{\mathrm{d}u} \qquad \frac{\mathrm{d}[(v-1)e^v]}{\mathrm{d}v}$$
$$\frac{\mathrm{d}[1/(1+\epsilon^2)]}{\mathrm{d}\epsilon} \qquad \frac{\mathrm{d}[1/\tan\alpha]}{\mathrm{d}\alpha}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2[\sin^2(\theta)]}{\mathrm{d}\theta^2} \qquad \frac{\mathrm{d}^2[x\sqrt{x}]}{\mathrm{d}x^2}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2[\ln(y)]}{\mathrm{d}y^2} \qquad \frac{\mathrm{d}^2[z^3 + 3z^2 + 3z + 1]}{\mathrm{d}z^2}$$

Exercice 5 : Dérivées de fonctions composées (III)

Calculer les dérivées suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}[(1+u^3)^4]}{\mathrm{d}u} \qquad \frac{\mathrm{d}[\sqrt{1+v^2}]}{\mathrm{d}v}$$
$$\frac{\mathrm{d}[\ln(1-x)]}{\mathrm{d}x} \qquad \frac{\mathrm{d}[2\sin(\alpha-\frac{\pi}{8})]}{\mathrm{d}\alpha}$$
$$\frac{\mathrm{d}[\tan^2(\theta)]}{\mathrm{d}\theta} \qquad \frac{\mathrm{d}[e^{-y^2}]}{\mathrm{d}y}$$
$$\frac{\mathrm{d}[1/\sqrt{1+u^2}]}{\mathrm{d}u} \qquad \frac{\mathrm{d}[\sqrt{z^3+3z^2+3z+1}]}{\mathrm{d}z}$$

Exercice 6 : Dérivées de fonctions réciproques
Calculer les dérivées suivantes des fonctions $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ et $\arctan(x)$.

Exercice 7 : Dérivées et tableau de variation
Déterminer l'image de l'intervalle I par les fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto e^x - x \qquad \text{pour } I = \mathbb{R} \qquad \text{pour } I = (0, e)$$
$$g : x \mapsto \ln(x+1) - x \qquad \text{pour } I = (-1, 0) \qquad \text{pour } I = [0, e]$$
$$h : x \mapsto \frac{e^x+1}{x+2} \qquad \text{pour } I = (-\infty, -2) \qquad \text{pour } I = \mathbb{R}_+$$

Exercice 8 : Dérivées et optima
Trouver les minimums et maximums globaux des fonctions suivantes (il est recommandé de s'aider d'un ordinateur pour calculer f en différentes valeurs, les exercices avec un (*) sont difficiles) :

$$f(z) = 2z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 7 \qquad \text{pour } z \in [-2, 6]$$
$$f(z) = 2z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 7 \qquad \text{pour } z \in [-2, 4]$$
$$f(z) = 2z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 7 \qquad \text{pour } z \in [0, 2]$$
$$f(t) = \frac{3-4t}{t^2+1} \qquad \text{pour } t \in [-2, 4]$$
$$f(x) = 3\cos(2x) - 5x \qquad \text{pour } x \in [0, 6] \quad (*)$$
$$f(x) = x\cos(x) - \sin(x) \qquad \text{pour } x \in [-15, -5]$$
$$f(z) = z^2 e^{1-z} \qquad \text{pour } z \in [-1/2, 5/2]$$
$$f(t) = \ln(t^2+t+3) \qquad \text{pour } t \in [-2, 2]$$

Exercice 9 : Dérivées et limites
Calculer, à l'aide de dérivées, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x)-\ln(3)}{x-3} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$$
$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x-e}{x-1} \qquad \lim_{x\to -1} \frac{x^{2019}+1}{x+1}$$

Exercice 10 : Dérivées successives
On considère la fonction $f(x) = (x+1)e^{-x}$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x}$.
2. Expliciter a_n
3. Vérifier que la suite $c_n = (-1)^n b_n$ est arithmétique. En déduire b_n puis $f^{(n)}(x)$.