21 octobre 2019

Exercices « Différentielles »

Exercice 1 : Calcul de différentielles
Exprimer dy en fonction de dx quand y et x sont liés par les relations suivantes :

1. $y = ax + b$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = a\mathrm{d}x$
2. $y = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$) $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = x^{n-1}\mathrm{d}x$
3. $y = \ln(x)$ $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{x}$
4. $y = e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \alpha e^{\alpha x}\mathrm{d}x$
5. $y = x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$), on pourra écrire $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ $\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}e^{\alpha \ln(x)}}{\mathrm{d}\ln(x)}\frac{\mathrm{d}\ln(x)}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x = \alpha e^{\alpha \ln(x)}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \alpha x^\alpha \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$. On retrouve la même formule que pour la question 3. Le fait d'élever à une puissance entière ou réelle ne change pas le résultat.

Exercice 2 : "Intégration" de différentielles
A partir des relations différentielles suivantes, proposer une relation entre y et x :
Il s'agit essentiellement d'un exercice de reconnaissance de forme, qui est facilité si on a fait l'exercice 1 précédemment.

1. $dy = 5dx$ $y = 5x + K$ avec $K \in \mathbb{R}$
2. $dy = nx^{n-1}dx$ $y = x^n + K$ avec $K \in \mathbb{R}$
3. $dy = \frac{dx}{x}$ $y = \ln(x) + K$ avec $K \in \mathbb{R}$
4. $dy = \alpha e^{\alpha x}dx$ $y = e^{\alpha x} + K$ avec $K \in \mathbb{R}$
5. $dy = \cos(x)dx$ $y = \sin(x) + K$ avec $K \in \mathbb{R}$
6. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$ l'égalité peut se réecrire $\ln(y) = \ln(x) + K$ (avec $K \in \mathbb{R}$) et donc $y = K'x$ (avec $K' = \exp(K) \in \mathbb{R}$

Exercice 3 : Dérivées de fonctions composées (I)
Calculer les dérivées suivantes :
Il s'agit systématiquement de composées avec la fonction $x \mapsto 1/x$. On peut utiliser le formulaire pour calculer ces dérivées.

$$\frac{\mathrm{d}(\tan(\alpha))}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{1}{\cos^2(\alpha)} \qquad \frac{\mathrm{d}[1/\cos(\alpha)]}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos^2(\alpha)}$$

$$\frac{\mathrm{d}[1/\sin(\alpha)]}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{-\cos(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \qquad \frac{\mathrm{d}[1/\tan(\alpha)]}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{-1}{\sin^2(\alpha)}$$

Si vous avez des problèmes à retrouver ces résultats, n'hésitez pas à demander à vos camarades avant de venir me voir

Exercice 4 : Dérivées de fonctions composées (II)
Il s'agit systématiquement de composées avec la fonction $x \mapsto 1/x$. On peut utiliser le formulaire pour calculer ces dérivées.

Calculer les dérivées suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}[u\ln(u)-u]}{\mathrm{d}u}=\ln(u) \qquad \frac{\mathrm{d}[(v-1)e^v]}{\mathrm{d}v}=ve^v$$

$$\frac{\mathrm{d}[1/(1+\epsilon^2)]}{\mathrm{d}\epsilon}=\frac{-2\epsilon}{(1+\epsilon^2)^2} \qquad \frac{\mathrm{d}[1/\tan\alpha]}{\mathrm{d}\alpha}=\frac{-1}{\sin^2(\alpha}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2[\sin^2(\theta)]}{\mathrm{d}\theta^2}=2\cos(2\theta) \qquad \frac{\mathrm{d}^2[x\sqrt{x}]}{\mathrm{d}x^2}=\frac{3}{4\sqrt{x}}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2[\ln(y)]}{\mathrm{d}y^2}=\frac{-1}{y^2} \qquad \frac{\mathrm{d}^2[z^3+3z^2+3z+1]}{\mathrm{d}z^2}=6(z+1)$$

Exercice 5 : Dérivées de fonctions composées (III)

Il s'agit systématiquement de composées avec la fonction $x \mapsto 1/x$. On peut utiliser le formulaire pour calculer ces dérivées.

Calculer les dérivées suivantes :

$$\frac{\mathrm{d}[(1+u^3)^4]}{\mathrm{d}u}=12u^2(1+u^3)^3 \qquad \frac{\mathrm{d}[\sqrt{1+v^2}]}{\mathrm{d}v}=\frac{v}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$\frac{\mathrm{d}[\ln(1-x)]}{\mathrm{d}x}=\frac{-1}{1-x} \qquad \frac{\mathrm{d}[2\sin(\alpha-\frac{\pi}{8})]}{\mathrm{d}\alpha}=2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{8}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}[\tan^2(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=2\tan(\theta)(1+\tan(\theta)^2) \qquad \frac{\mathrm{d}[e^{-y^2}]}{\mathrm{d}y}=-2ye^{-y^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}[1/\sqrt{1+u^2}]}{\mathrm{d}u}=\frac{-u}{(1+u^2)^{3/2}} \qquad \frac{\mathrm{d}[\sqrt{z^3+3z^2+3z+1}]}{\mathrm{d}z}=\frac{3(z^2+2z+1)}{2\sqrt{z^3+3z^2+3z+1}}$$

Exercice 6 : Dérivées de fonctions réciproques

Calculer les dérivées suivantes des fonctions $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$ et $\arctan(x)$.

Vu en cours

Exercice 7 : Dérivées et tableau de variation

Déterminer l'image de l'intervalle I par les fonctions suivantes :

$$\begin{array}{rrr}
f : x \mapsto e^x - x & \text{pour } I=\mathbb{R} & \text{pour } I=(0,e) \\
g : x \mapsto \ln(x+1)-x & \text{pour } I=(-1,0) & \text{pour } I=[0,e] \\
h : x \mapsto \dfrac{e^x+1}{x+2} & \text{pour } I=(-\infty,-2) & \text{pour } I=\mathbb{R}_+
\end{array}$$

Voir transparents du cours (p. 38)

Exercice 8 : Dérivées et optima

Trouver les minimums et maximums globaux des fonctions suivantes (il est recommandé de s'aider d'un ordinateur pour calculer f en différentes valeurs, les exercices avec un (*) sont difficiles) :

$$
\begin{aligned}
f(z) &= 2z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 7 && \text{pour } z \in [-2, 6] \\
f(z) &= 2z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 7 && \text{pour } z \in [-2, 4] \\
f(z) &= 2z^4 - 16z^3 + 20z^2 - 7 && \text{pour } z \in [0, 2] \\
f(t) &= \frac{3 - 4t}{t^2 + 1} && \text{pour } t \in [-2, 4] \\
f(x) &= 3\cos(2x) - 5x && \text{pour } x \in [0, 6] \quad (*) \\
f(x) &= x\cos(x) - \sin(x) && \text{pour } x \in [-15, -5] \\
f(z) &= z^2 e^{1-z} && \text{pour } z \in [-1/2, 5/2] \\
f(t) &= \ln(t^2 + t + 3) && \text{pour } t \in [-2, 2]
\end{aligned}
$$

Voir transparents du cours (p. 59)

Exercice 9 : Dérivées et limites
Calculer, à l'aide de dérivées, les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 3} \frac{\ln(x) - \ln(3)}{x - 3} = \ln'(3) = \frac{1}{3} \qquad \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} = \underbrace{g'}_{g(x)=\sqrt{x+2}}(2) = \frac{1}{2\sqrt{2+2}} = \frac{1}{4}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{e^x - e}{x - 1} = \exp'(2) = e^2 \qquad \lim_{x\to -1} \frac{x^{2019} + 1}{x + 1} \underbrace{g'}_{g(x)=x^{2019}}(-1) = 2019 \times (-1)^{2018} = 2019$$

Exercice 10 : Dérivées successives
On considère la fonction $f(x) = (x + 1)e^{-x}$

1. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x}$. On remarque que la fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ comme somme et produit de fonctions $\mathcal{C}^\infty$. La fonction $f^{(n)}$ est donc bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. On va montrer que la propriété $P_n : f^{(n)}(x) = (a_n x + b_n)e^{-x}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence.
   Initialisation On rappelle que $f^{(0)} = f$. La propriété est donc vraie au rang $n = 0$ avec $a_0 = b_0 = 1$.
   Hérédité On suppose la propriété vraie au rang n. Et on cherche à calculer $f^{(n+1)}(x)$.

   $$
   \begin{aligned}
   f^{(n+1)}(x) \underbrace{=}_{\text{définition}} \frac{\mathrm{d}f^{(n)}(x)}{\mathrm{d}x} \underbrace{=}_{\text{hyp. de réc.}} & \frac{\mathrm{d}[(a_n x + b_n)e^{-x}]}{\mathrm{d}x} \\
   & = a_n e^{-x} - (a_n x + b_n)e^{-x} = (-a_n x + (a_n - b_n))e^{-x}
   \end{aligned}
   $$

   La propriété est donc vraie au rang $n + 1$ avec $a_{n+1} = -a_n$ et $b_{n+1} = a_n - b_n$.
   On conclut par récurrence que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Expliciter a_n D'après la question précédente, a_n est définie par la relation de récurrence $a_{n+1} = -a_n$. On reconnaît en a_n une suite géométrique de premier terme $a_0 = 1$ et de raison -1. On a donc $a_n = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

3. Vérifier que la suite $c_n = (-1)^n b_n$ est arithmétique. En déduire b_n puis $f^{(n)}(x)$. D'après les questions 2 et 3, on a

   $$c_{n+1} = (-1)^{n+1} b_{n+1} = (-1)^{n+1}(a_n - b_n) = (-1)^{2n+1} + (-1)^{n+2} b_n = -1 + (-1)^n b_n = -1 + c_n$$

La suite c_n est donc arithmétique de premier terme $c_0 = (-1)^0 b_0 = 1$ et de raison -1. On a donc $c_n = 1 - n$ d'où on déduit $b_n = (-1)^n(1-n)$. En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout réel x :

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n(x + (1-n))e^{-x}$$