4 novembre 2019

Feuille d'exercices « Développements Limités »

Exercice 1 : Formule de Taylor

Soit f une fonction dérivable n fois sur un intervalle I autour de 0. Soit $x \in I$ un point proche de 0. En utilisant la formule de Taylor, exprimer $f(x+a)$ en fonction de f et des ses dérivées successives en a ($f(a)$, $f'(a)$, etc). On utilisera un terme d'erreur de la forme $o(x^n)$, *i.e.* $f(x) = \cdots + o(x^n)$.

$f(x) =$

Exercice 2 : DL usuels (calculs)

Calculer un DL à l'ordre 3 des fonctions suivantes (en 0). On pourra essayer de se ramener à un DL connu.

1. $\sqrt{9+x} =$
2. $\frac{1-\cos(x)^2}{\sin(x)} =$
3. $\exp(\sin(x)) =$

Exercice 3 : Limites

A l'aide de développements limités, calculer les limites suivantes

1. $\lim_{x\to 0}[\cos(x)]^{1/\tan x}$
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-2x^2}-(1-x^2)}{x^4}$
3. $\lim_{x\to +\infty} x(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}-1)$ (on pourra considérer une variable intérmédiaire et raisonner en deux temps).

Exercice 4 : Quotients de DLs

Rappeler les DL en 0 à l'ordre 5 de $\sin(x)$ et à l'ordre 4 de $\cos(x)$. En déduire des DL en 0 à l'ordre 4 de $\dfrac{x}{\sin(x)}$ et $\dfrac{1}{\cos(x)}$.

Exercice 5 : DL et limites

Calculer les limites suivantes à l'aide de DLs en 0 en évitant les calculs superflus (c'est à dire, en faisant les DLs à l'ordre qui permet de lever la forme indéterminée) :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$$

Exercice 6 : Développement asymptotique

On cherche à montrer que $\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}x^{3/2}} + o(x^{-3/2})$ quand x tend vers l'infini. On pose $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}$ et $g(x) = \sqrt{x+\sqrt{x^2-1}}$.

1. Identifier le terme dominant de $f(x)$ (c'est à dire la fonction simple $h(x)$ telle $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{h(x)} = 1$)

2. Calculer un développement asymptotique de $f(x)$ en $+\infty$ de la forme $f(x) = h(x)[1 + \cdots + o(x^\alpha)]$ en réfléchissant bien à la valeur de α requise pour montrer le résultat demandé.
3. Faire de même pour $g(x)$
4. Conclure.

Exercice 7 : DL et limites (II)
On cherche à calculer la limite suivante : $l = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}[\sin(x)]^{\tan(x)}$. On considère pour cela la fonction suivante, définie pour h au voisinage de 0^+ :

$$f(h) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - h\right)^{\tan\left(\frac{\pi}{2}-h\right)}$$

Montrer que $f(h) = [\cos(h)]^{1/\tan h}$. En déduire la limite l à l'aide de DLs. On pourra passer en forme exponentielle et composer les DL en 0 de $\cos(x)$ et $\ln(1-x)$.

Exercice 8 : Pour aller plus loin, approximation de $\cos(x)$
Touver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2} = o(x^n)$$

avec n maximal. (Indice : On peut écrire le DL de $f(x)$ en 0 en fonction de a et b et chercher les valeurs qui annulent le maximum de coefficients dans ce DL).

Exercice 9 : Pour les braves
Calculer la limite l définie par :

$$l = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x$$

Donner un équivalent (c'est à dire faire un développement asymptotique au premier ordre non nul) en $+\infty$ de

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^x - l$$