27 janvier 2020

Feuille d'exercices « Dérivées Partielles »

Exercice 1 : Fonctions exponentielles
On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y) \mapsto \frac{x^2+y^2}{x}$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 1$.

- Pour y_0 fixé, calculer la limite de $x \mapsto f(x, y_0)$ en 0.
- Pour x_0 fixé, calculer la limite de $y \mapsto f(x_0, y)$ en 0.
- Calculer les dérivées partielles de f en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

Exercice 2 : Composées
Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (c'est à dire dont toutes les dérivées partielles existent et sont continues). On considère la fonction $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$$

Montrer que

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z} = 0$$

Exercice 3 : Dérivée d'ordre 2
Calculer les dérivées partielles aux ordres 1 et 2 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par

$$f(x, y) = \frac{x^3y^3}{x^2 + y^2}$$

Exercice 4 : Dérivée d'ordre 2
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ (c'est à dire dont les dérivées secondes existent et sont continues) telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = -f(y, x)$.

- Donner un exemple de telle fonction
- Montrer que la fonction f vérifie $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 : Contrainte
On considère une casserole de rayon R et de hauteur h. On note V le volume de la casserole et S sa surface.

- Exprimer V et S en fonction de R et h.
- Calculer les différentielles totales dV et dS.
- On suppose que le volume est fixe ($V = V_0$). Trouver une relation entre dh et dR.
- En déduire une expression simple de dS en fonction de dh ou dR (un seul des deux, celui qui vous semble le plus simple)
- En déduire les couples (h, R) qui annulent dS.

Les différentes étapes de l'exercice précédent permettent de minimiser la surface à volume constant sans jamais donner la forme explicite de S en fonction de R. C'est une approche différente de celle vue au S1 pour le même exercice, qui consistait à substituer h à R dans l'expression de R. Ici on subsitue les différentielles.

Problèmes autour du Hamiltonien
Les systèmes hamiltoniens décrivent une grande classe de systèmes dynamiques dans laquelle une certaine quantité (souvent l'énergie du système) est constante au cours du temps (ou de façon équivalente, le long des trajectoires du système). On peut souvent décrire ces systèmes sous la forme

$$H(p,x) = K$$

où H est appelé le Hamiltonien, K est une constante, x désigne un terme de *déplacement* (typiquement une position, un angle, etc) et p un terme de *moment* (typiquement proportionnel à la vitesse). La dynamique du système est alors décrite par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = \frac{\partial H}{\partial p} \\ \frac{dp}{dt} & = \frac{\partial H}{\partial x} \end{cases}$$

Les 4 problèmes suivants illustrent différents systèmes (1 issu de la biologie et 3 issus de la physique) et vous invitent à montrer qu'ils sont hamiltoniens.

Problème 1 : Dynamique de Lotka-Volterra et Hamiltonien.
On considère 2 populations de proies et de prédateurs (par exemple des lynx et des chasseurs) qui évoluent conjointement. On note $x(t)$ la taille de population de proies au temps t et $y(t)$ la taille de la population de prédateurs. On suppose de plus que $x(t)$ et $y(t)$ sont liées par les relations

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt}(t) & = x(t) \times (\alpha - \beta y(t)) \\ \frac{dy}{dt}(t) & = y(t) \times (\lambda x(t) - \gamma) \end{cases}$$

avec $\alpha, \beta, \lambda, \gamma > 0$. [1]
On admet que si $x(0) > 0$ et $y(0) > 0$, alors $x(t) > 0$ et $y(t) > 0$ pour tout $t > 0$.
On considère le *Hamiltonien* du système proie-prédateur défini par

$$H(t) = F(x(t), y(t))$$

avec $F(x,y) = \beta y + \lambda x - \alpha \ln y - \gamma \ln x$.
Montrer que la fonction $t \mapsto H(t)$ est constante.

Problème 2 : Pendule simple et Hamiltonien.
On considère un pendule simple formé d'une masse ponctuelle m suspendue à un fil de longueur l.
On note note $\theta(t)$ formé par le pendule avec la verticale au temps t.
En faisant un bilan des forces, trouver une relation entre $\frac{d^2\theta}{dt^2}(t)$ et $\theta(t)$.
On considère le *Hamiltonien* défini par

$$H(t) = F(p(t), \theta(t))$$

avec $F(p,\theta) = \frac{p^2}{2ml^2} + mgl(1 - \cos(\theta))$ et $p(t) = ml^2 \frac{d\theta}{dt}(t)$.
Montrer que la fonction $t \mapsto H(t)$ est constante. [2]

Problème 3 : Ressort et Hamiltonien
On considère une masse ponctuelle m fixée au bout d'un ressort de constante de raideur k. On note note $x(t)$ l'allongement au temps t du ressort par rapport à sa longueur d'équilibre.
En faisant un bilan des forces, trouver une relation entre $\frac{d^2x}{dt^2}(t)$ et $x(t)$.

1. On parle alors d'un systèmes d'équations différentielles. On reviendra dessus en fin de S2 et vous en verrez beaucoup en L2.
2. On pourra reconnaître dans le premier terme l'énergie cinétique du pendule, dans le deuxième l'énergie potentielle de gravité et voir dans ce résultat une reformulation du principe de conservation de l'énergie totale.

On considère le *Hamiltonien* défini par

$$H(t) = F(p(t), x(t))$$

avec $F(p,x) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}$ et $p(t) = 2m\frac{dx}{dt}(t)$.
Montrer que la fonction $t \mapsto H(t)$ est constante. [3]

Problème 4 : Problème à deux corps
On considère deux corps de masse m_1 et m_2 (par exemple deux étoiles) qui s'attirent (par force gravitationnelle). On considère le repère centré sur le corps 1. Le mouvement des deux astres reste dans un plan et on note $(x(t), y(t))$ les coordonnées du corps 2 au temps t dans ce repère.
En faisant un bilan des forces, exprimer $\frac{d^2x}{dt^2}(t)$ et $\frac{d^2y}{dt^2}(t)$ en fonction de $x(t)$ et $y(t)$. Pour simplifier les calculer, on suppose que $\mathcal{G}m_1 = 1$.
On considère le *Hamiltonien* défini par

$$H(t) = F(p(t), q(t), x(t), y(t))$$

avec $F(p,q,x,y) = \frac{1}{2}(p^2+q^2) - \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $p(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ et $q(t) = \frac{dy}{dt}(t)$.
Montrer que la fonction $t \mapsto H(t)$ est constante.

3. On pourra reconnaître dans le premier terme l'énergie cinétique du pendule, dans le deuxième l'énergie potentielle du ressort et voir dans ce résultat une reformulation du principe de conservation de l'énergie totale pour un ressort.