21 février 2020

Corrigé des exercices du cours « Intégrations »

Exercice 1 : Intégrations par partie (page 46)
Calculer les valeurs exactes des quantités suivantes :

$$A = \int_{-1}^{1} xe^{3x}dx \qquad B = \int_{0}^{1} y^4 e^y dy$$

$$C = \int_{0}^{1} (t^2+t)e^{2t}dt \qquad D = \int_{1}^{e} 1.\ln(x)dx$$

$$E_n = \int_{1}^{e} u^n \ln(u)du \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad F = \int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{\ln(v)}{v}dv$$

$$G = \int_{1}^{e^2} (2x^3+1)\ln(x)dx \qquad H = \int_{1}^{4} \sqrt{3s}\ln(s)ds$$

Correction

A : On pose $g(x) = x$ et $f'(x) = e^{3x}$ d'où on tire on $g'(x) = 1$ et $f(x) = e^{3x}/3$ et on utilise la formule d'intégration par partie.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} xe^{3x}dx &= \int_{-1}^{1} g(x)f'(x)dx = [g(x)f(x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} g'(x)f(x)dx \\ &= [xe^{3x}/3]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{e^{3x}}{3}dx = \frac{e^3+e^{-3}}{3} - [e^{3x}/9]_{-1}^{1} = \frac{e^3+e^{-3}}{3} - \frac{e^3-e^{-3}}{9} \\ &= \frac{2e^3+4e^{-3}}{9} = \frac{2(e^3+2e^{-3})}{9}\end{aligned}$$

B : On va résoudre un problème un peu plus général. On pose $I_n = \int_0^1 y^n e^y dy$ et on cherche une relation de récurrence entre I_n et I_{n-1}. Il suffira ensuite de calculer $B = I_4$. Pour trouver la relation de récurrence, on pose $g(y) = y^n$ et $f'(y) = e^y$ d'où on tire on $g'(y) = ny^{n-1}$ et $f(y) = e^y$ avant d'utiliser la formule d'intégration par partie.

$$\begin{aligned}I_n = \int_{0}^{1} y^n e^y dt &= \int_{0}^{1} g(y)f'(y)dy = [g(y)f(y)]_0^1 - \int_{0}^{1} g'(y)f(y)dy \\ &= [y^n e^y]_0^1 - \int_{0}^{1} ny^{n-1}e^y dy = e - nI_{n-1}\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser notre relation de récurrence pour trouver I_4. On calcule tout d'abord $I_0 = \int_0^1 e^y dy = [e^y]_0^1 = (e-1)$ puis on déroule la récurrence :

$$\begin{aligned}&I_0 = e-1 \\ &I_1 = e - I_0 = 1 \\ &I_2 = e - 2I_1 = e-2 \\ &I_3 = e - 3I_2 = e - 3(e-2) = 6-2e \\ &I_4 = e - 4I_3 = e - 4(6-2e) = 9e-24\end{aligned}$$

C : On raisonne comme pour le problème précédent en posant $J_n = \int_0^1 t^n e^{2t} dy$ et on cherche une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1}. Il suffira ensuite de calculer $C = J_2 + J_1$. Pour trouver la relation de récurrence, on pose $g(t) = t^n$ et $f'(t) = e^{2t}$ d'où on tire on $g'(t) = nt^{n-1}$ et $f(t) = e^{2t}/2$ avant d'utiliser la formule d'intégration par partie.

$$\begin{aligned} J_n = \int_0^1 t^n e^{2t} dt = \int_0^1 g(t) f'(t) dt &= [g(t)f(t)]_0^1 - \int_0^1 g'(t) f(t) dt \\ &= [t^n e^{2t}/2]_0^1 - \int_0^1 nt^{n-1} \frac{e^{2t}}{2} dt = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} J_{n-1} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à utiliser notre relation de récurrence pour trouver C. On calcule tout d'abord $J_0 = \int_0^1 e^{2t} dt = [e^{2t}/2]_0^1 = \frac{e^2-1}{2}$ puis on déroule la récurrence :

$$\begin{aligned} J_0 &= \frac{e^2 - 1}{2} \\ J_1 &= \frac{e^2}{2} - \frac{J_0}{2} = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\ J_2 &= \frac{e^2}{2} - \frac{2J_1}{2} = \frac{e^2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{e^2 - 1}{4} \end{aligned}$$

d'où on déduit $C = J_2 + J_1 = \frac{e^2}{2}$

D : On pose $g(x) = \ln(x)$ (on n'a pas vraiment le choix, on ne sait pas calculer une primitive de $\ln(x)$) et $f'(x) = 1$ d'où on tire on $g'(x) = 1/x$ et $f(x) = x$ et on utilise la formule d'intégration par partie.

$$\begin{aligned} \int_1^e 1.\ln(x) dx = \int_1^e g(x) f'(x) dx &= [g(x)f(x)]_1^e - \int_1^e g'(x) f(x) dx \\ &= [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}.x dx = [x\ln(x) - x]_1^e = 1 \end{aligned}$$

On vient de prouver au passage que $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto \ln(x)$.

E : On pose $g(u) = \ln(u)$ et $f'(u) = u^n$ d'où on tire on $g'(u) = 1/u$ et $f(u) = u^{n+1}/(n+1)$ avant d'utiliser la formule d'intégration par partie.

$$\begin{aligned} E_n = \int_1^e u^n \ln(u) du = \int_1^e g(u) f'(u) du &= [g(u)f(u)]_1^e - \int_1^e g'(u) f(u) du \\ &= \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\ln(u)\right]_1^e - \int_1^e \frac{u^{n+1}}{n+1}\frac{1}{u} du = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \int_1^e \frac{u^n du}{n+1} \\ &= \frac{e^{n+1}}{n+1} - \left[\frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^e = \frac{e^{n+1}}{n+1} - \frac{e^{n+1} - 1}{(n+1)^2} = \frac{ne^{n+1} + 1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

En reprenant le calcul sans calculer les crochets intermédiaires, on aurait pu écrire :

$$\int_1^e u^n \ln(u) du = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1}\ln(u) - \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}\right]_1^e$$

qui nous montre qu'une primitive de $u \mapsto u^n \ln(u)$ est $u \mapsto \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}\left((n+1)\ln(u) - 1\right)$

F : On pose $g(v) = \ln(v)$ et $f'(v) = 1/v$ d'où on tire on $g'(v) = 1/v$ et $f(v) = \ln(v)$ et on utilise la formule d'intégration par partie.

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln(v)}{v} dv = \int_{\sqrt{e}}^e g(v) f'(v) dv &= [g(v)f(v)]_{\sqrt{e}}^e - \int_{\sqrt{e}}^e g'(v) f(v) dv \\ &= [\ln(v)^2]_{\sqrt{e}}^e - \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln(v)}{v} dv = \frac{3}{4} - \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln(v)}{v} dv \end{aligned}$$

D'où on déduit $2F = 3/4$ et donc $F = 3/8$.

G : Pour cet intégrale, on sert des résultats trouvés pour les intégrales D et E_n

$$G_3 = \int_1^{e^2} x^3 \ln(x)dx = \left[\frac{x^4}{4}\ln(x) - \frac{x^4}{16}\right]_1^{e^2} = \frac{2e^8}{4} - \frac{e^8}{16} + \frac{1}{16} = \frac{7e^8+1}{16}$$

$$G_1 = \int_1^{e^2} \ln(x)dx = [x\ln(x) - x]_1^{e^2} = (2e^2 - e^2) + 1 = e^2 + 1$$

D'où on déduit par linéarité de l'intrégale :

$$G = 2G_3 + G_1 = \frac{7e^8+1}{8} + e^2 + 1$$

H : On pose $g(s) = \ln(s)$ et $f'(s) = \sqrt{3s}$ d'où on tire on $g'(s) = 1/s$ et $f(s) = \frac{2}{9}(3s)^{3/2}$ et on utilise la formule d'intégration par partie.

$$\begin{aligned}
\int_1^4 \sqrt{3s}\ln(s)ds &= \int_1^4 g(s)f'(s)ds = [g(s)f(s)]_1^4 - \int_1^4 g'(s)f(s)ds \\
&= \left[\frac{2}{9}(3s)^{3/2}\ln(s)\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{9}3^{3/2}\sqrt{s}ds = \frac{2.3^{3/2}}{9}\left[s^{3/2}\ln(s) - \frac{2s^{3/2}}{3}\right]_1^4 \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left((8\ln(4) - \ln(1)) - \frac{16-2}{3}\right) = \frac{4}{\sqrt{3}}\left(8\ln(2) - \frac{7}{3}\right)
\end{aligned}$$

Exercice 2 : Formules trigonométriques (II)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une ou plusieures IPP (et éventuellement d'un peu de linéarisation...)

$$A = \int_0^{\pi/2} \cos(x)e^x dx \qquad B = \int_0^{\pi/2} \sin(x)e^x dx$$

$$C = \int_0^1 x^2\cos(x)dx \qquad D = \int_0^1 x^2\cos^2(x)$$

Correction

Pour les questions A, B, C, il faut 2 IPP. Pour la 4, il faut aussi linéariser le $\cos^2(x)$.

A+iB : On peut passer par les complexes en posant $E = A + iB$. On a alors :

$$\begin{aligned}
E &= \int_0^{\pi/2} (\cos(x) + i\sin(x))e^x dx = \int_0^{\pi/2} e^{ix}.e^x dx = \int_0^{\pi/2} e^{(1+i)x}dx = \left[\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^{\pi/2} \\
&= \frac{1}{i+1}\left(e^{\pi/2}.e^{i\pi/2} - e^0.e^{i.0}\right) = \frac{1}{1+i}\left(e^{\pi/2}i - 1\right) = \frac{1}{2}\left(e^{\pi/2}i - 1\right)(1-i) \\
&= \frac{e^{\pi/2}-1}{2} + i\frac{e^{\pi/2}+1}{2}
\end{aligned}$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, $A = \frac{e^{\pi/2}-1}{2}$ et $B = \frac{e^{\pi/2}-1}{2}$.

A : On pose $f(x) = \cos(x)$ et $g'(x) = e^x$ d'où on tire $f'(x) = -\sin(x)$ et $g(x) = e^x$.

$$\begin{aligned}
A = \int_0^{\pi/2} \cos(x)e^x dx &= \int_0^{\pi/2} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f'(x)g(x)dx \\
&= [\cos(x)e^x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} (-\sin(x))e^x dx = -1 + \int_0^{\pi/2} \sin(x)e^x dx
\end{aligned}$$

Qui fait apparaître B. On fait une nouvelle IPP pour calculer B en posant $f(x) = \sin(x)$ et $g'(x) = e^x$ (c'est à dire $f'(x) = \cos(x)$ et $g(x) = e^x$) pour aboutir à

$$\begin{aligned} B = \int_0^{\pi/2} \sin(x)e^x dx = \int_0^{\pi/2} f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} f'(x)g(x)dx \\ = [\sin(x)e^x]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \cos(x)e^x dx = e^{\pi/2} - A \end{aligned}$$

En combinant les deux égalités précédentes, on obtient

$$A = e^{\pi/2} - 1 - A$$

D'où on déduit $A = \frac{e^{\pi/2}-1}{2}$

B : En repartant des résultats de la question précédente, on a $B = e^{\pi/2} - A$ et $A = -1 + B$. En combinant les deux expressions pour éliminer A, on trouve $B = e^{\pi/2} + 1 - B$ d'où on déduit $B = \frac{e^{\pi/2}+1}{2}$

C : On va faire 2 IPP en dérivant les puissances de x pour se ramner à une intégrale qu'on sait calculer. On pose $f(x) = x^2$ et $g'(x) = \cos(x)$ (c'est à dire $f'(x) = 2x$ et $g(x) = \sin(x)$) puis on fait une IPP

$$\begin{aligned} C = \int_0^1 x^2 \cos(x)dx = \int_0^1 f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)dx \\ = [x^2 \sin(x)]_0^1 - \int_0^1 2x \sin(x)dx = \sin(1) - 2 \int_0^1 x \sin(x)dx \end{aligned}$$

On fait une nouvelle IPP en posant $f(x) = x$ et $g'(x) = \sin(x)$ (c'est à dire $f'(x) = 1$ et $g(x) = -\cos(x)$) pour calculer $\int_0^1 x \sin(x)dx$. On obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \sin(x)dx = \int_0^1 f(x)g'(x)dx = [f(x)g(x)]_0^1 - \int_0^1 f'(x)g(x)dx \\ = [-x \cos(x)]_0^1 - \int_0^1 (-\cos(x))dx = -\cos(1) + \int_0^1 \cos(x)dx \\ = -\cos(1) + [\sin(x)]_0^1 = \sin(1) - \cos(1) \end{aligned}$$

En combinant les deux égalités, on obtient $C = \sin(1) - 2(\sin(1) - \cos(1)) = 2\cos(1) - \sin(1)$.

D : On commence par linéariser $\cos^2(x)$ en $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$ pour se ramener à la forme plus simple : $D = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x^2 \cos(2x)dx$. Le premier terme donne $1/6$ et le deuxième se traite de la même façon que dans la question précédente pour donner $\frac{1}{8}(\sin(2) + 2\cos(2)$. On aboutit au final à $D = \frac{1}{8}(\sin(2) + 2\cos(2) + \frac{1}{6}$

Exercice 3 : Changement de variables (I)

Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé.

$$A = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \tan(\theta) d\theta \qquad \text{en posant } v = \cos(\theta)$$

$$B = \int_{0}^{\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta \qquad \text{en posant } v = \sin(\theta)$$

$$C = \int_{0}^{\pi/\omega} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\omega t}{2}\right) dt \qquad \text{en posant } y = \frac{\pi}{3} - \frac{\omega t}{2}$$

$$D = \int_{x_0}^{x_0+H} (x - x_0) e^{-\left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2} dx \qquad \text{en posant } z = \left(\frac{x - x_0}{h}\right)^2$$

$$E = \int_{0}^{R} \frac{dr}{(R^2 + r^2)^{3/2}} \qquad \text{en posant } r = R\tan(\alpha)$$

Correction

Pour toutes ces intégrales, la méthode à adopter est celle détaillée en cours :

1. On change les bornes
2. On change l'éléments différentiel
3. On change l'intégrande (l'expression dans l'intégrale)

pour se ramener à une intégrale plus simple et finir le calcul (éventuellement via des étapes intermédiaires).

A : On change les bornes, $\theta = \pi/4 \Rightarrow v = \cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$ et $\theta = \pi/3 \Rightarrow v = \cos(\pi/3) = 1/2$. On a également l'égalité $dv = -\sin(\theta)d\theta$ entre élements différentiels. Le changement de variable donne alors

$$A = \int_{\theta=\pi/4}^{\theta=\pi/3} \tan(\theta) d\theta = \int_{v=\sqrt{2}/2}^{v=1/2} \frac{\overbrace{\sin(\theta)d\theta}^{=dv}}{\underbrace{\cos(\theta)}_{=v}} = \int_{\sqrt{2}/2}^{1/2} \frac{-dv}{v} = \int_{1/2}^{\sqrt{2}/2} \frac{dv}{v} = [\ln|v|]_{1/2}^{\sqrt{2}/2} = \frac{\ln(2)}{2}$$

B : On change les bornes, $\theta = 0 \Rightarrow v = \sin(0) = 0$ et $\theta = \pi/2 \Rightarrow v = \sin(\pi/2) = 1$. On a également l'égalité $dv = \cos(\theta)d\theta$ entre élements différentiels. Le changement de variable donne alors

$$B = \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \cos^3(\theta) d\theta = \int_{v=0}^{v=1} \underbrace{\cos^2(\theta)}_{\substack{=1-\sin^2(\theta) \\ =1-v^2}} \underbrace{\cos(\theta)d\theta}_{=dv} = \int_0^1 (1 - v^2) dv = \left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

C : On change les bornes, $t = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$ et $t = \pi/\omega \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$. On a également l'égalité $dy = -\frac{\omega}{2}dt$, qui se réécrit $dt = -\frac{2}{\omega}dy$, entre élements différentiels. Le changement de variable donne alors

$$C = \int_{t=0}^{t=\pi/\omega} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\omega t}{2}\right) dt = \int_{y=\pi/3}^{y=-\pi/6} \underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\omega t}{2}\right)}_{=\cos(y)} \underbrace{dt}_{=-\frac{2}{\omega}dy} = \int_{-\pi/6}^{\pi/3} \frac{2\cos(y)dy}{\omega}$$

$$= \frac{2}{\omega} [\sin(y)]_{-\pi/6}^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}+1}{\omega}$$

D : On change les bornes, $x = x_0 \Rightarrow z = 0$ et $x = x_0 + H \Rightarrow z = (H/h)^2$. On a également l'égalité $dz = 2\frac{x-x_0}{h^2}dx$ entre élements différentiels qu'on peut réécrire $(x-x_0)dx = h^2dz/2$. Le changement de variable donne alors

$$D = \int_{x_0}^{x_0+H} (x-x_0)e^{-\left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2}dx = \int_{z=0}^{z=(H/h)^2} \underbrace{e^{-\left(\frac{x-x_0}{h}\right)^2}}_{=e^{-z}} \underbrace{(x-x_0)dx}_{=h^2dz/2}$$
$$= \frac{h^2}{2}\int_0^{(H/h)^2} e^{-z}dz = \frac{h^2}{2}[-e^{-z}]_0^{(H/h)^2} = \frac{h^2}{2}(1-e^{-(H/h)^2})$$

E : On commence par exprimer α en fonction de r pour le changement de bornes. On obtient $\alpha = \arctan(r/R)$. On change alors les bornes, $r = 0 \Rightarrow \alpha = \arctan(0) = 0$ et $r = R \Rightarrow \alpha = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$. On a également l'égalité $dr = R(1+\tan^2(\alpha))d\alpha$ entre élements différentiels. Le changement de variable donne alors

$$E = \int_{r=0}^{r=R} \frac{dr}{(R^2+r^2)^{3/2}} = \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi/4} \frac{R(1+\tan^2(\alpha))d\alpha}{(R^2+R^2\tan^2(\alpha))^{3/2}} = \int_0^{\pi/4} \frac{R(1+\tan^2(\alpha))}{R^3(1+\tan^2(\alpha))^{3/2}}d\alpha$$
$$= \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi/4} \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}}$$

On utilise alors l'égalité $1+\tan^2(\alpha) = \frac{1}{\cos^2(\alpha)}$ pour simplifier l'expression.

$$E = \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi/4} \frac{d\alpha}{\sqrt{1+\tan^2(\alpha)}} = \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi/4} \frac{d\alpha}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2(x)}}} = \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi/4} |\cos(\alpha)|d\alpha$$
$$= \frac{1}{R^2}\int_0^{\pi/4} \underbrace{\cos(\alpha)}_{\cos(\alpha)=|\cos(\alpha)| \text{ sur } [0,\pi/4]} d\alpha = \frac{1}{R^2}[\sin(\alpha)]_0^{\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2R^2}$$

Exercice 4 : Changement de variables (II)
Calculer les intégrales suivantes à l'aide du changement de variable proposé.

$$A = \int_0^1 w\sqrt{3w+1}dw \qquad \text{en posant } z = 3w+1$$
$$B = \int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} \qquad \text{en posant } v = e^x$$
$$C = \int_1^2 \frac{ds}{s(s^3+1)} \qquad \text{en posant } y = s^3+1$$
$$D = \int_{-1}^0 \frac{u^3du}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}} \qquad \text{en posant } v = u^2+1$$
$$E = \int_0^3 \frac{t\ln(t^2+1)}{t^2+1}dt \qquad \text{en posant } x = t^2+1$$

En utilisant l'égalité $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ pour B et $\frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x}$ pour C.
Correction
Pour toutes ces intégrales, la méthode à adopter est celle détaillée en cours :

1. On change les bornes
2. On change l'éléments différentiel
3. On change l'intégrande (l'expression dans l'intégrale)

pour se ramener à une intégrale plus simple et finir le calcul (éventuellement via des étapes intermédiaires).

A : On change les bornes, $w = 0 \Rightarrow z = 1$ et $w = 1 \Rightarrow z = 4$. On a également l'égalité $dz = 3dw$ (ou encore $dw = dz/3$) entre élements différentiels. Enfin, on note que $w = (z-1)/3$. Le changement de variable donne alors

$$A = \int_{w=0}^{w=1} w\sqrt{3w+1}dw = \int_{z=1}^{z=4} \underbrace{w\sqrt{3w+1}}_{=\frac{z-1}{3}\sqrt{z}} \underbrace{dw}_{=\frac{dz}{3}} = \int_1^4 \frac{(z-1)\sqrt{z}}{9}dz$$
$$= \frac{1}{9}\left[\frac{2z^{5/2}}{5} - \frac{2z^{3/2}}{3}\right]_1^4 = \frac{1}{9}\left\{\frac{64}{5} - \frac{16}{3} - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right)\right\} = \frac{1}{9}\left(\frac{62}{5} - \frac{14}{3}\right) = \frac{116}{135}$$

B : On change les bornes, $x = 0 \Rightarrow v = 1$ et $x = 1 \Rightarrow v = e$. On a également l'égalité $dv = e^x dx$ (ou encore $dx = dv/v$) entre élements différentiels. Le changement de variable donne alors

$$B = \int_{x=0}^{x=1} \frac{dx}{e^x+1} == \int_{v=1}^{v=e} \underbrace{\frac{1}{e^x+1}}_{=\frac{1}{v+1}} \underbrace{dx}_{=\frac{dv}{v}} = \int_1^e \frac{dv}{v(v+1)}$$

On utilise alors l'indication de l'exercice (qui se prouve très facilement, faites le calcul) pour écrire :

$$B = \int_1^e \frac{dv}{v(v+1)} = \int_1^e \frac{dv}{v} - \int_1^e \frac{dv}{v+1}$$
$$= [\ln|v|]_1^e - [\ln|v+1|]_1^e = 1 + \ln(2) - \ln(e+1) = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$$

C : On change les bornes, $s = 1 \Rightarrow y = 2$ et $s = 2 \Rightarrow y = 9$. On a également l'égalité $dy = 3s^2ds$ entre élements différentiels. Le changement de variable donne alors

$$C = \int_{s=1}^{s=2} \frac{ds}{s(s^3+1)} = \int_{y=2}^{y=9} \frac{\overbrace{s^2ds}^{=dy}}{\underbrace{s^3(s^3+1)}_{=(y-1)y}} = \int_2^9 \frac{dy}{y(y-1)}$$

On utilise alors l'indication de l'exercice (qui se prouve très facilement, faites le calcul) pour écrire :

$$C = \int_2^9 \frac{dy}{y(y-1)} = \int_2^9 \frac{dy}{y-1} - \int_2^9 \frac{dy}{y}$$
$$= [\ln|y-1|]_2^9 - [\ln|y|]_2^9 = (\ln(8) - \ln(1)) - (\ln(9) - \ln(2)) = 4\ln(2) - 2\ln(3)$$

D : On change les bornes, $u = -1 \Rightarrow v = 2$ et $u = 0 \Rightarrow v = 1$. On a également l'égalité $dv = 2udu$ entre élements différentiels. Le changement de variable donne alors

$$D = \int_{u=-1}^{u=0} \frac{u^3 du}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}} = \int_{v=2}^{v=1} \underbrace{\frac{\overbrace{u^2}^{=v-1}}{(u^2+1)\sqrt{u^2+1}}}_{=v\sqrt{v}} \underbrace{udu}_{=dv/2} = \frac{1}{2}\int_2^1 \frac{v-1}{v\sqrt{v}}dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1-v}{v\sqrt{v}}dv = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{v\sqrt{v}}dv - \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{v}}dv = \frac{1}{2}\left[-2v^{-1/2}\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[2v^{1/2}\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{2}(2 - 2/\sqrt{2}) - \frac{1}{2}(2\sqrt{2}-2) = 2 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$$

E : On change les bornes, $t = 0 \Rightarrow x = 1$ et $t = 3 \Rightarrow x = 10$. On a également l'égalité $dx = 2tdt$ entre élements différentiels. Le changement de variable donne alors

$$E = \int_{t=0}^{t=3} \frac{t\ln(t^2+1)}{t^2+1}dt = \int_{x=1}^{x=10} \underbrace{\frac{\ln(t^2+1)}{t^2+1}}_{=\ln(x)/x} \underbrace{tdt}_{=dx/2} = \frac{1}{2}\int_1^{10} \frac{\ln(x)}{x}dx$$

On peut ensuite faire une IPP comme dans l'intégrale F de l'exercice 1 ou reconnaître une intégrale de la forme $\int u'(x)u(x)x$ avec $u(x) = \ln(x)$. On finit alors le calcul :

$$E = \frac{1}{2}\int_1^{10} \frac{\ln(x)}{x}dx = \frac{1}{4}[\ln^2(x)]_1^{10} = \frac{\ln^2(10)}{4}$$