27 janvier 2020

Feuille d'exercices « Intégrations »

Les intégrales sont souvent présentées comme un moyen de calculer des **aires** mais elles peuvent servir plus généralement à calculer d'autres quantités : longueur, volume, etc.
Dans la majorité des cas, la procédure à suivre pour calculer la quantité d'intérêt est similaire :

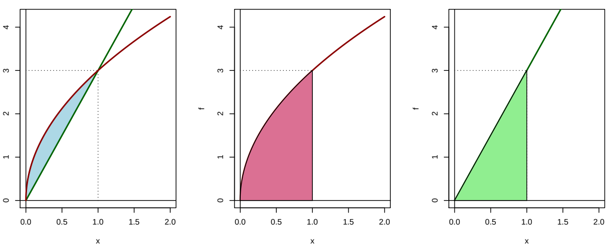
1. On décompose cette quantité en *éléments élémentaires* très simple. C'est ce qui est fait quand on décompose une aire en une multitude de petits rectangles.
2. On calcule la quantité d'intérêt (longueur, surface, volume, etc) pour chaque élément élémentaire. Par exemple, un rectangle de largeur dx et de hauteur $f(x)$ a pour surface $f(x)dx$
3. On somme sur tous les éléments élémentaires qui composent notre quantité. C'est comme ça qu'on obtient $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$ dans le cas d'un calcul d'aire.

L'étape crucial est évidemment celle de *décomposition* : une décomposition astucieuse va rendre le calcul final de l'intégrale aisé.
Un corrigé manuscrit des exercices est disponible ici. Ce document ne fournit que les corrections des problèmes.

1 Calcul d'Aire

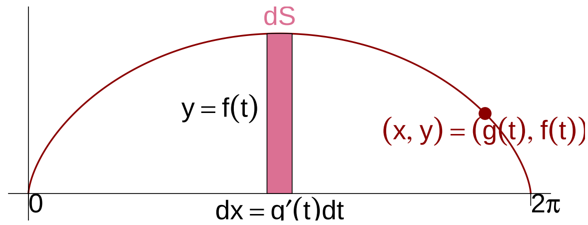
C'est l'application la plus directe du cours, il n'y a quasiment pas d'adaptation à faire.

Exercice 1 : En coordonnées cartésiennes
Calculer la surface (en bleu clair) comprise entre courbes d'équations $y = 3\sqrt{x}$ (rouge sombre) et $y = 3x$ (vert sombre). (Indice : on peut commencer par calculer les surfaces indiquées en rouge clair et vert clair)



Exercice 2 : En coordonnées paramétriques
Il arrive que l'équation d'une courbe ne soit pas donnée sous la forme $y = f(x)$ pour $x \in [x_0, x_1]$ mais sous la forme $\begin{cases} y(t) & = f(t) \\ x(t) & = g(t) \end{cases}$ avec $t \in [t_0, t_1]$.
C'est un cas particulier du changement de variable. On commence par remarquer que $dx = g'(t)dt$. Si on considère un élément élémentaire de surface dS, on a toujours $dS = ydx$ qui peut se réécrire $dS = f(t)g'(t)dt$. L'intégrale devient donc

$$I = \int_{x_0=g(t_0)}^{x_1=g(t_1)} y(x)dx = \int_{t_0}^{t_1} f(t)g'(t)dt$$



Note : On ne sait pas écrire y en fonction de x (il existe bien un h telle que $y = h(x)$ mais on ne connaît pas h sans faire de calcul). En revanche on sait que $y(t) = f(t)$ et que $y(x(t)) = h(x(t)) = h \circ g(t)$, on a donc forcément $f = h \circ g$.

On considère la cycloïde d'équation $\begin{cases} y(t) & = 1 - \cos(t) \\ x(t) & = t - \sin(t) \end{cases}$ pour $t \in [0, 2\pi]$ (representée plus haut).

C'est (une période de) la trajectoire d'un point fixé à une roue de vélo qui roule à vitesse constante en ligne droite.

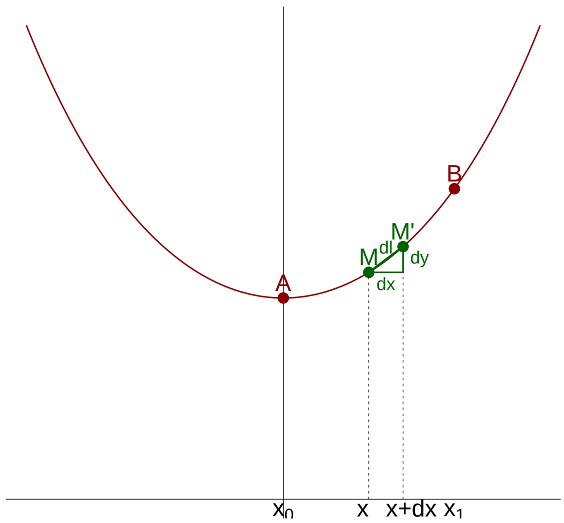
Calculer l'aire sous la courbe de la cycloïde.

2 Calcul de Longueur

Exercice 3 : En coordonnées cartésiennes

On considère un arc de courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = f(x)$, pour $x \in [x_0, x_1]$ et on cherche à déterminer la longueur de cet arc.

Au lieu de décomposer une aire en petits rectangles, on va décomposer notre courbe en petits segments et calculer la longueur élémentaire dl de chaque segment.



On remarque que l'arc de courbe (MM') peut être approché par le segment MM' qui a pour longueur

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2 \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)} = \sqrt{1 + (y')^2}dx$$

On en déduit que la longueur de la courbe est donnée par

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (f')^2(x)}dx$$

Calculer la longueur de la chaînette d'équation $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, dont la courbe est représentée plus haut, rentre les points $A = (0, 1)$ et $B = (1, f(1))$. La courbe de f est la forme adoptée par une chaînette qu'on attrape par ses deux extrémités et qu'on laisse pendre.
Indice : On pourra comparer f^2 et $1 + (f')^2$ pour simplifier les calculs.

Exercice 4 : En coordonnées paramétriques

On suppose que la courbe est donnée sous forme paramétrique $\begin{cases} y(t) & = f(t) \\ x(t) & = g(t) \end{cases}$ avec $t \in [t_0, t_1]$. Cette fois encore, le segment MM' a pour longueur élémentaire $dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ mais c'est la suite du calcul qui change. On commence par noter que $dx = g'(t)dt$ et $dy = f'(t)dt$, on a donc

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dt^2 \left(\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right)} = \sqrt{(g')^2 + (f')^2}dt$$

On en déduit que la longueur de la courbe est donnée par

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(f')^2(t) + (g')^2(t)}dt$$

En reprenant l'équation du cycloïde, calculer la longueur d'un arc de cycloïde.
Indice : On pourra exprimer $1 - \cos(t)$ en fonction de $\sin(t/2)$ pour se débarasser de la racine.

3 Valeur Moyenne

On a vu en cours que la *valeur moyenne* d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ est définie par $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. Du point de vue de l'aire sous la courbe entre a et b, f et $\bar{f}$ ont le même comportement. La notion de valeur moyenne est particulièrement utile pour les fonctions périodiques, avec la valeur moyenne calculée sur une période, pour savoir à quelle fonction constante comparer la fonction périodique.

Exercice 5 : Fonctions Trigonométriques
Calculer la valeur moyenne sur une période de $\cos$, $\sin$, $1+\cos$ et $1+\sin$. Les résultats vous paraîssent-ils cohérents ?

Exercice 6 : Fonctions Puissances

1. Calculer la valeur moyenne sur $[0, 1]$, notée I_n de la fonction $x \mapsto x^n$.
2. Quelle est la limite en $+\infty$ de I_n, cela vous paraît-il cohérent ?

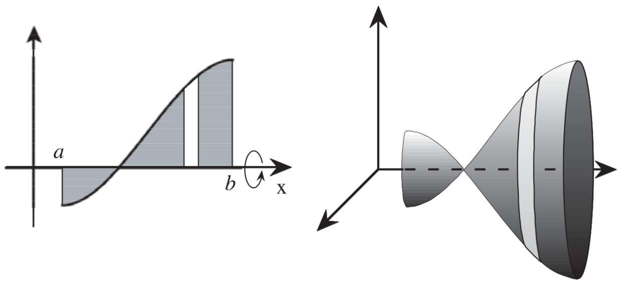
Exercice 7 : Valeur Efficace
La notion de valeur moyenne est utile dans certaines conditions mais pas toujours informative. Les exercices précédents montrent par exemple que la valeur moyenne d'un signal sinusoidale est nulle mais l'électricité délivrée dans les habitations (220V, 50Hz) ne se comporte pas pour autant comme un courant constant de tension nulle...
Dans ce contexte, la notion pertinente est celle de *valeur efficace* F, définie comme la racine de la valeur moyenne de la fonction au carrée, ou en termes mathématiques :

$$F = \sqrt{\bar{f^2}} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b f^2(x)dx}$$

En utilisant la définition précédente, calculer la valeur efficace de $\cos$ sur une période.

4 Calcul de Volume

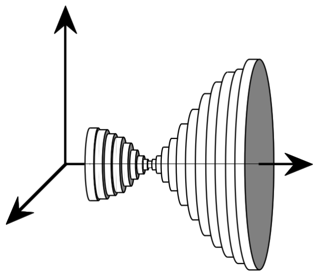
Dans cette partie, on se limitera à des *volumes de révolution*, c'est à dur les volumes qu'on peut obtenir en faisant tourner une surface autour d'un axe :



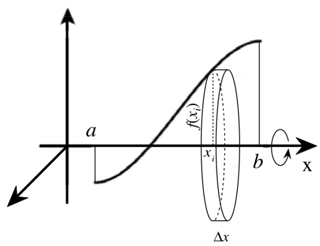
De nombreux solides réguliers sont obtenus de cette manière :

— Faire tourner un disque autour d'un de ses rayons donne une sphére
— Faire tourner un rectangle autour d'un de ses côtés donne un cylindre
— Faire tourner un triangle autour d'un de ses côtés donne un cône
— etc

et on se limite à la méthode des disques qui consiste à découper le solide en une multitude de disques élémentaires :



On peut ensuite calculer le volume dV d'un disque élémentaire positionné en x :



On obtient $dV = \pi f(x)^2 dx$ (il faut connaître le volume d'un cylindre pour trouver la réponse). En sommant, on en déduit que le volume V est donné par :

$$V = \int_a^b \pi f^2(x) dx$$

La difficulté consiste donc à (i) expliciter la fonction f qui relie la position x du cylindre élémentaire à son rayon $f(x)$ et (ii) à calculer l'intégrale.

Exercice 8 : Volume d'un cône
En utilisant la méthode des disques, (re)trouver le volume d'un cône de hauteur h et de rayon R.

Exercice 9 : Volume d'une sphère
En utilisant la méthode des disques, (re)trouver le volume d'une sphère de rayon R. On peut commencer par calculer le volume d'une demi-spère.

Problèmes

Problème 1 : Vitesse de libération

Quelle est la quantité minimale d'énergie nécessaire pour qu'un mobile de masse m échappe totalement à l'attraction terrestre ? [indice : pour échapper totalement à l'attraction terrestre, il faut être à une distance infinie de la Terre, on peut calculer le travail nécessaire pour passer de la distance h à la distance h+dh et sommer ce travail entre des bornes bien choisies] Quelle est la vitesse de libération correspondante (c'est à dire la vitesse qu'il faut avoir au temps initial, en l'absence de force autre que l'attraction terrestre) ?

On considère une ligne qui part du centre de la Terre et qui va à l'infini et on mesure la hauteur h depuis le centre de la Terre. Le mobile repose initialement à la surface de la terre, qui correspond à $h_0 R_T = 6370\ km$, et est à distance infinie de la terre (correspondant à $h_1 = +\infty$) après avoir échappé à l'attraction terrestre. À hauteur h, le mobile subit une force d'intensité $F(h) = \mathcal{G}\frac{mM_T}{h^2}$, où M_T désigne la masse de la Terre et $\mathcal{G}$ la constante gravitationnelle, pointant vers le centre de la Terre. Pour passer de la hauteur h à $h + dh$, il faut fournir un travai $dW = F(h)dh$. La quantité totale de travail W est obtenue en sommant toutes ces quantités élémentaires de travail entre h_0 et h_1 :

$$W = \int_{h_0}^{h_1} F(h)dh = \int_{h_0}^{h_1} \mathcal{G}\frac{mM_T}{h^2}dh = \mathcal{G}mM_T \left[-\frac{1}{h}\right]_{h_0}^{h_1} = \mathcal{G}mM_T R_T = gR_T \times m$$

où $g = \mathcal{G}M_T/R_T^2 \simeq 9.81\ m.s^{-2}$ désigne la gravité à la surface de la Terre. La vitesse de libération v_0 correspondante s'obtient avec la loi de conservation de l'énergie en supposant que la vitesse à l'infinie v_1 est nulle :

$$\Delta E = 0 \Rightarrow \Delta(\frac{1}{2}mv^2) = -W \Rightarrow \frac{1}{2}m(\underbrace{v_1^2}_{=0} - v_0^2) = -mgR_T$$
$$\Rightarrow v_0^2 = 2gR_T \Rightarrow v_0 = \sqrt{2gR_T} \simeq 7.9\ km.s^{-1}$$

Problème 2 : Orbite géostationnaire

Quelle est la quantité minimale d'énergie nécessaire pour mettre un satellite en orbite géostationnaire ? [comme le problème précédent mais il suffit d'arriver à l'orbite géostationnaire avec la bonne vitesse pour rester en orbite géostationnaire, c'est à dire de sorte que la force centripète compense l'attraction terrestre et que la vitesse angulaire soit la même que celle de la Terre]

Le raisonnement est proche de celui de l'exercice précédent mais la condition finale est différente. Notons h_1 l'altitude géostationnaire (par rapport au centre de la Terre). On rappelle que le mouvement sur l'orbite géostationnaire est circulaire uniforme de vitesse tangentielle v_1 et a une période de $T = 1$ jour $(= 84600$ secondes). On a donc

$$\frac{2\pi h_1}{v_1} = T \Rightarrow v_1 = \frac{2\pi h_1}{T}$$

Un satellite sur orbite est soumis à une accélération centrifuge v_1^2/h_1 qui compense exactement l'accélération centripète dûe à la gravité, on a donc :

$$\mathcal{G}\frac{M_T}{h_1^2} = \frac{v_1^2}{h_1} \Rightarrow h_1 = \mathcal{G}\frac{M_T}{v_1^2}$$

En combinant les 2, on en déduit que

$$h_1 = \mathcal{G}\frac{M_T}{v_1^2} = \mathcal{G}\frac{M_T}{\left(\frac{2\pi h_1}{T}\right)^2} \Leftrightarrow h_1^3 = \mathcal{G}\frac{M_T T^2}{4\pi^2} \Leftrightarrow h_1 = \left(\mathcal{G}\frac{M_T T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \simeq 42162\ km$$

soit $\simeq 36000$ km au dessus de la surface du sol. Le travail nécessaire pour élever un satellite de masse m à cette hauteur est donné par

$$W = \int_{h_0}^{h_1} F(h)dh = \int_{h_0}^{h_1} \mathcal{G}\frac{mM_T}{h^2}dh = \mathcal{G}mM_T\left[-\frac{1}{h}\right]_{h_0}^{h_1} = \mathcal{G}mM_T\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{h_1}\right) = mgR_T\left[1 - \frac{R_T}{h_1}\right]$$

La vitesse finale (sur l'orbite géostationnaire) est donnée par

$$v_1 = \frac{2\pi h_1}{T} \simeq 3.1\ km.s^{-1}$$

En utilisant de nouveau le principe de conservation de l'énergie, la vitesse initiale v_0 doit vérifier :

$$\frac{1}{2}m\Delta[v^2] = -W \Leftrightarrow v_0^2 = v_1^2 + gR_T\left[1 - \frac{h_1}{R_T}\right] \leftrightarrow v_0 = \sqrt{v_1^2 + gR_T\left[1 - \frac{R_T}{h_1}\right]} \simeq 7.9\ km.s^{-1}$$

Problème 3 : Croissance de bactérie

On considère une bactérie sphérique de rayon R dans un milieu riche en nutriments N. La bactérie absorbe des nutriments proportionnellement à sa surface à un taux ρ_1 (en $N.m^{-2}.s^{-1}$) et consomme des nutriments pour son métabolisme proportionnellement à son volume à taux ρ_2 (en $N.m^{-3}.s^{-1}$). Quelle est la taille maximale $R_{\max}$ que peut atteindre la bactérie ?

Notons $F(R)$ le flux de nutriments disponibles (absorbés - consommés par le métabolisme) de la bactérie. On a :

$$F(R) = \rho_1 4\pi R^2 - \rho_2\frac{4\pi}{3}R^3 = \rho_1 4\pi R^2\left(1 - \frac{\rho_2 R}{3\rho_1}\right)$$

En faisant une étude (simple) de fonction, on constate que $F(R)$ absorbe plus de nutriments qu'elle n'en consomme tant que $\frac{\rho_2 R}{3\rho_1} \leq 1$ mais en consomme plus qu'elle n'en absorbe dès que $\frac{\rho_2 R}{3\rho_1} > 1$. Sa taille maximale est donnée par le point limite entre ces deux régimes (absorption = consommation) :

$$\frac{\rho_2 R_{\max}}{3\rho_1} = 1 \Rightarrow R_{\max} = \frac{3\rho_1}{\rho_2}$$

Pour se rassurer, on peut vérifier que $R_{\max}$ est homogène à une longueur.

Tous les nutriments absorbés mais non consommés par le métabolisme sont consacrés à la croissance avec un taux de conversion ρ_3 (en $N.m^{-3}$, il faudrait normalement exprimer le taux de conversion en $N.g^{-1}$ mais on suppose ici pour simplifier que la masse est égale au volume). On suppose que la bactérie a un rayon $R_0 = R_{\max}/4$ au temps 0. Combien de temps lui faut-il pour atteindre le rayon $R_1 = R_{\max}/2$?

Pendant un temps infinitésimal dt, une bactérie de taille $R < R_{\max}$ absorbe (au délà de sa consommation métabolique) une quantité $dN = F(R)dt$ de nutriments qu'elle convertit en biomasse (ou volume). Le changement dV de volume est donné par $dV = dN/\rho_3$. On a donc

$$dV = \frac{1}{\rho_3}F(R)dt = \frac{\rho_1 4\pi R^2}{\rho_3}\left(1 - \underbrace{\frac{\rho_2 R}{3\rho_1}}_{=R/R_{\max}}\right)dt$$

On voudrait trouver convertir cette égalité en une relation entre dR et dt pour connaître l'accroissement infinitésimal de taille de la bactérie. On utilise la relation entre volume et rayon d'une sphère pour écrire $\frac{dV}{V} = 3\frac{dR}{R}$ d'où on tire

$$dR = \frac{R}{3}\frac{dV}{V} = \frac{\rho_1 4\pi R^3}{\rho_3 V}\left(1 - \frac{R}{R_{\max}}\right)dt = \frac{3\rho_1}{\rho_3}\left(1 - \frac{R}{R_{\max}}\right)dt$$

On peut inverser la relation sous la forme

$$dt = \frac{\rho_3}{3\rho_1} \frac{dR}{1 - R/R_{\max}}$$

qu'il ne reste plus qu'à intégrer entre $R_{\max}/4$ et $R_{\max}/2$ pour répondre à la question :

$$\begin{aligned}
\Delta t &= \int_{R=R_{\max}/4}^{R=R_{\max}/2} \frac{\rho_3}{3\rho_1} \frac{dR}{1 - R/R_{\max}} \\
&= \frac{\rho_3}{3\rho_1} R_{\max} \int_{R=R_{\max}/4}^{R=R_{\max}/2} \frac{dR/R_{\max}}{1 - R/R_{\max}} \\
&= \frac{\rho_3}{3\rho_1} R_{\max} \left[-\ln \left| 1 - \frac{R}{R_{\max}} \right| \right]_{R_{\max}/4}^{R_{\max}/2} \\
&= \frac{\rho_3}{3\rho_1} R_{\max} \left(\ln(3/4) - \ln(1/2) \right) \\
&= \ln(3/2) \frac{\rho_3}{3\rho_1} R_{\max}
\end{aligned}$$

On peut là encore se rassurer en vérifiant que la réponse a la bonne dimension.