Feuille d'exercice Intégration - Corrigé.

I] Calcul d'aire

Exercice 1 : L'aire bleue correspond à la différence entre l'aire rouge (A) et l'aire verte (B).

$$A = \int_0^1 3\sqrt{x}\, dx = \left[2x^{3/2}\right]_0^1 = 2 \qquad B = \int_0^1 3x\, dx = \left[\frac{3x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{2}$$

On a donc une surface bleue de $\frac{1}{2}$.

Exercice 2 : On note I l'aire sous la courbe de la cycloïde, D'après l'énoncé

$$I = \int_0^{2\pi} y(t)x'(t)dt = \int_0^{2\pi} (1-\cos(t)) \times (1-\cos(t))\,dt = \int_0^{2\pi} (1+\cos^2(t))dt - \underbrace{\int_0^{2\pi} 2\cos(t)dt}_{=0}$$

On linéarise $\cos^2(t)$ en $\cos^2(t) = \frac{1+\cos(2t)}{2}$. En injectant dans l'expression précédente on obtient alors :

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{3dt}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2t)dt}_{=0} = 3\pi$$

II] Calcul de longueur.

Exercice 3 : D'après l'énoncé, on cherche à calculer.

$$I = \int_0^1 \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx \quad \text{avec} \quad f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad 1+(f'(x))^2 = 1 + \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x}+2+e^{-2x}}{4} = \left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^2 = f(x)^2$$

Comme $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0,1]$, on a $\sqrt{1+(f'(x))^2} = \sqrt{f(x)^2} = |f(x)| = f(x)$ sur $[0,1]$. On peut donc finir le calcul.

$$I = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}dx = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^1 = \frac{e - e^{-1}}{2} \approx 1,175$$

Exercice 4 : D'après l'énoncé, il faut calculer.

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(g'(t))^2 + (f'(t))^2}\, dt \quad \text{avec} \quad \begin{array}{ll} g(t) = t - \sin(t) & (\text{et donc } g'(t) = 1-\cos(t)) \\ f(t) = 1-\cos(t) & (\text{et donc } f'(t) = \sin(t)) \end{array}$$

$(g'(t))^2 + (f'(t))^2 = (1-\cos(t))^2 + \sin^2(t) = 2 - 2\cos(t)$. On cherche à exprimer cette quantité comme un carré pour se débarasser de la racine. D'après les formules de trigonométrie : $\sin^2(t) = 1-\cos(2t)$ donc

$$\sqrt{2-2\cos(t)} = \sqrt{4\sin^2(t/2)} = |2\sin(t/2)| = 2\sin(t/2) \quad \text{car } \sin(t/2) \geq 0 \text{ sur } [0, 2\pi]$$

On a donc

$$L = \int_0^{2\pi} 2\sin(t/2)\,dt = \left[-4\cos(t/2)\right]_0^{2\pi} = -4\cos(\pi) + 4\cos(0) = 8.$$

III] Valeurs Moyenne

Exercice 5 : Toutes les fonctions de l'énoncé ont pour période 2π

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x)\,dx = 0. \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\cos(x))\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(1+\sin(x))\,dx = 1$$

C'est normal, $\cos(x)$ et $\sin(x)$ sont nulles en moyenne sur 1 période. Et logiquement la valeur moyenne de $x \mapsto 1+\cos(x)$ et $x \mapsto 1+\sin(x)$ est 1.

Exercice 6 : $$I_n = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

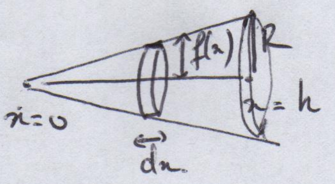
Quand $n \to +\infty$, x^n tend vers 0 partout sur $[0,1[$. Il est cohérent que sa valeur moyenne tende également vers 0.

Exercice 7 : La valeur efficace de cos sur une période est donnée par $F = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2(x)\,dx}$. Pour calculer F on linéarise $\cos^2(x)$ à l'aide la formule $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$.

$$F = \sqrt{\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx}_{=1/2 \text{ (cf valeur moyenne)}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

IV] Calcul de Volume.

Exercice 8 : On découpe le cône en un ensemble de petits disques comme suit



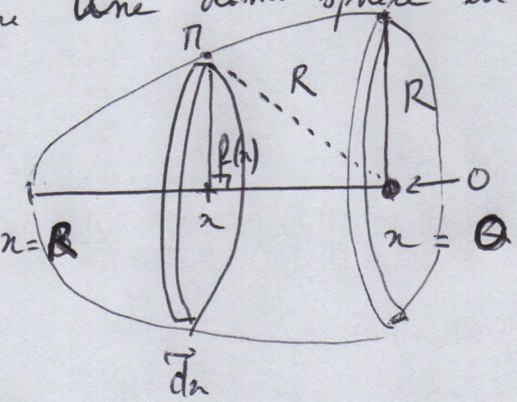
Le rayon du disque d'épaisseur dx situé en position x est donnée par $f(x) = \frac{x}{h} \times R$ (on cherche une fonction linéaire qui vaut 0 en $x=0$ et R en $x=h$, c'est la seule possibilité). En reprenant la formule de l'énoncé, on obtient

$$V = \int_0^h \pi \times \left(\frac{x}{h}R\right)^2 dx = \frac{\pi R^2}{h^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}\pi R^2 h.$$

et on retrouve la formule du volume d'un cône.

Exercice 9: Volume d'une sphère.

On découpe une demi-sphère en un ensemble de petits disques comme suit:



(dessin pas à l'échelle).

Par définition d'une sphère, le point Π est à distance R du centre O de la sphère. D'après le théorème de Pythagore on a donc

$x^2 + f(x)^2 = R^2$.

En appliquant la formule de l'énoncé, on a donc

$$V_{1/2} = \int_0^R \pi f(x)^2 dx = \int_0^R \pi \left(R^2 - x^2\right) dx = \pi \left[R^2 x - \frac{x^3}{3} \right]_0^R = \frac{2\pi}{3} R^3.$$

Le volume V d'une sphère entière est donc $V = 2V_{1/2} = \frac{4\pi}{3} R^3$.