5 novembre 2018

Test Complexe et Limites

Exercice 1 : Module et argument
On considère le nombre complexe $z = a + ib$. Donner le module et un argument du complexe e^z.
$e^z = e^{a+ib} = e^a \times e^{ib}$. e^a est un nombre réel positif et e^{ib} est un nombre complexe de module 1. On en déduit que e^z a pour module e^a et pour argument b.

Exercice 2 : Limite
En vous ramenant à des limites usuelles, calculez
- $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2(x)}{\sin^2(x)}$
- $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1}$

$$\frac{1-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

Mais l'énoncé aurait du être $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)}$ pour lequel la correction est

$$\frac{1-\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1-\cos(x)}{x^2}\frac{x^2}{\sin^2(x)} = \frac{1-\cos(x)}{x^2}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{-2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$$

Pour la deuxième limite, on multiplie d'abord par la quantité conjuguée :

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1} &= \frac{(1+x)-(1-x)}{e^x-1}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = \frac{2x}{e^x-1}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \\ &= \left(\frac{e^x-1}{2x}\right)^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 2 \times \frac{1}{1+1} = 1\end{aligned}$$

Exercice 3 : Passage en forme exponentielle
Écrire $z_1 = \cos(\theta)(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ sous forme exponentielle.
On peut écrire $z_1 = \cos(\theta)e^{i\theta}$ et on pourrait être tenté de s'arrêter là. Mais on rappelle qu'une expression du type $\rho e^{i\theta}$ n'est une forme exponentielle **que si** $\rho > 0$. Il faut donc distinguer suivant le signe de $\cos(\theta)$. En particulier
- Si $\theta \in [-\pi/2, \pi/2] + 2k\pi$, $\cos(\theta) \geq 0$ et $z_1 = \cos(\theta)e^{i\theta}$
- Si $\theta \notin [-\pi/2, \pi/2] + 2k\pi$, $\cos(\theta) \leq 0$ et $z_1 = (-\cos(\theta))(-e^{i\theta}) = |\cos(\theta)|e^{i(\theta+\pi)}$

On peut aussi déceler le problème en calculant module et argument. Le module de z_1 est $|\cos(\theta)|$ qui n'est pas toujours égal à $\cos(\theta)$...

Exercice 4 : Racine Carrée Complexe
Déterminer les racines carrées complexes des nombres suivants :
- $Z_1 = 2i$
- $Z_2 = 3 + 4i$

On commence par mettre Z_1 sous forme exponentielle parce qu'on sait le faire et qu'on a vu en cours qu'il est plus facile de calculer les racines d'un complexe écrit sous forme exponentielle. On obtient $Z_1 = 2e^{i\pi/2}$ et on tire une racine carrée particulière : $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$. On sait par ailleurs si z_1 est racine, $-z_1$ aussi. Les deux racines de Z_1 sont donc $1 + i$ et $-(1 + i)$. Pour Z_2, on cherche les racines sous la forme $z = a + ib$ avec a et b dans $\mathbb{R}$. Les deux contraintes $|z|^2 = |Z_2|$ et $z^2 = Z_2$ se traduisent en

$$\begin{cases} a^2 + b^2 & = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ a^2 - b^2 & = 3 \\ 2ab = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 & = 8 \\ 2b^2 & = 2 \\ ab = 2 \end{cases} \begin{cases} a & = \pm 2 \\ b & = \pm 1 \\ ab = 2 \end{cases}$$

On a donc 4 couples possibles pour (a, b), à savoir $(2, 1)$, $(-2, 1)$, $(2, -1)$ et $(-2, -1)$. Mais la contrainte $ab = 2$ nous indique que a et b doivent être de même signe. Au final, les deux racines de Z_2 sont donc $2 + i$ et $-(2 + i)$.

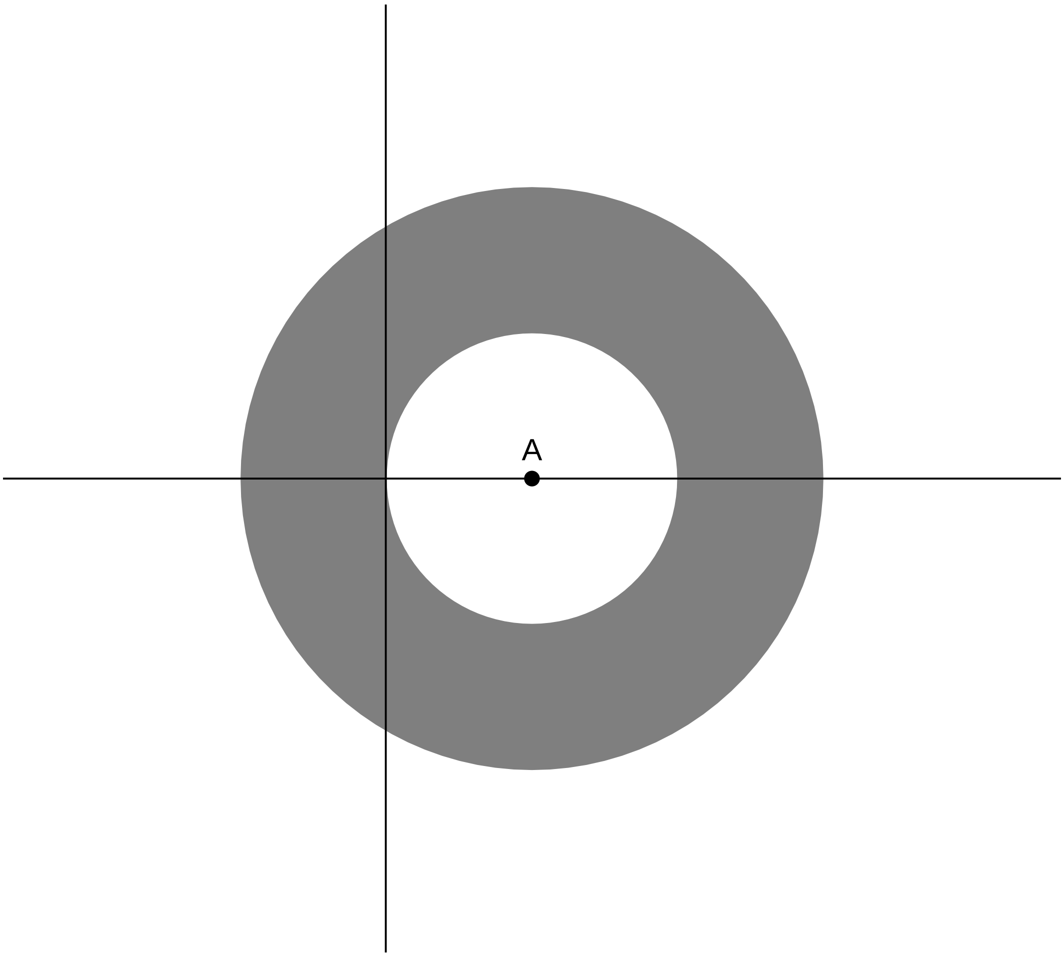
Exercice 5 : Équation complexe (bonus)
Résoudre l'équation de variable $z \in \mathbb{C}$:

$$\lfloor |z - 1| \rfloor = 1$$

On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière d'un nombre réel x. Quelle est la figure correspondante dans le plan complexe ?
On note A le point d'affixe 1, M le point d'affixe z et on raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} \lfloor |z - 1| \rfloor = 1 &\Leftrightarrow 1 \leq |z - 1| < 2 \\ &\Leftrightarrow 1 \leq MA < 2 \end{aligned}$$

Ce qui signifie que M est entre l'anneau compris entre le cercle C_1 de centre A et de rayon 1 (inclus) et le cercle C_2 de centre A et de rayon 2 (exclus). Ce qui correspond à la zone en gris sur la figure suivante :


A