23 octobre 2019

Exercices corrigés sur les « complexes »

Exercice 1 : Forme algébrique

Mettre sous forme algébrique $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ les complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{1+2i}{3-4i}$ C'est une fraction, on multiplie numérateur et dénominateur le complexe conjugué du dénominateur pour se ramener à dénominateur positif. $z_1 = \frac{1+2i}{3-4i}\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{(1+2i)(3+4i)}{|3-4i|^2} = \frac{-5+10i}{25} = \frac{-1+2i}{5}$
2. $z_2 = \frac{11+5i}{1-i} + \frac{11-5i}{1+i}$ On réduit tout le monde au même dénominateur $(1+i)(1-i)$ qui a le bon goût d'être réel. $z_2 = \frac{(11+5i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} + \frac{(11-5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{6+16i}{2} + \frac{6-16i}{2} = \frac{12}{2} = 6$
3. $z_3 = \left(\frac{1+i}{3-i}\right)^2$. On peut adopter deux approches : (i) mettre $\frac{1+i}{3-i}$ sous forme algébrique avant de l'élever au carré ou (ii) l'élever au carré avant de le mettre sous forme algébrique (en se ramenenant à un numérateur réel). On va adopter l'approche (i) : mettre $\frac{1+i}{3-i}$ sous forme algébrique (en se ramenant à un numérateur réel) puis l'élever au carré. $\frac{1+i}{3-i} = \frac{(1+i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{2+4i}{10} = \frac{1+2i}{5}$ et on a donc $z_3 = \frac{1+2i}{5} \times \frac{1+2i}{5} = \frac{-3+4i}{25}$.
4. $z_4 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ Déjà sous forme algébrique
5. $z_5 = -\frac{2}{1-i\sqrt{7}}$ On se ramène à un dénominateur réel en multipliant par le complexe conjugué : $z_5 = -\frac{2}{1-i\sqrt{7}}\frac{1+i\sqrt{7}}{1+i\sqrt{7}} = -\frac{2(1+i\sqrt{7})}{8} = -\frac{1+i\sqrt{7}}{4}$
6. $z_6 = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^5}$. On commence par calculer $(1+i)^9$ et $(1-i)^5$. On remarque que $(1+i)^2 = 2i$, $(1+i)^3 = 2i(1+i) = -2+2i = -2(1-i)$. On a donc $(1+i)^9 = [(1+i)^3]^3 = -8 \times (1-i)^3$. z_6 se simplifie donc en $z_6 = -\frac{8}{(1-i)^2}$. Comme $(1-i)^2 = -2i$, on a $z_6 = \frac{4}{i} = -4i$.

   Remarque On peut résoudre l'exercice plus simplement en notant que $1+i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ d'où on tire aisément $z_6 = \frac{(\sqrt{2})^9 e^{9i\pi/4}}{(\sqrt{2})^5 e^{-5i\pi/4}} = (\sqrt{2})^4 e^{14i\pi/4} = 4e^{-i\pi/2} = -4i$
7. $z_7 = \frac{1}{(1+3i)(2-i)} = \frac{(1-3i)(2+i)}{|1+3i|^2|2-i|^2} = \frac{5-5i}{10\times 5} = \frac{1-i}{10}$
8. $z_8 = \frac{(1+11i)^2}{1-i} = \frac{(1+11i)^2(1+i)}{|1-i|^2} = \frac{1}{2}(-120+22i)(1+i) = (-60+11i)(1+i) = -71+59i$
9. $z_9 = 2e^{2i\pi/3} = 2\cos(2\pi/3) + 2i\sin(2\pi/3) = -1 + i\sqrt{3}$
10. $z_{10} = \frac{2e^{i\pi/4}}{e^{-3i\pi/4}} = 2e^{i\pi} = -2$
11. $z_{11} = 2e^{i\pi/4} \times e^{-3i\pi/4} = 2e^{-i\pi/2} = -2i$
12. $z_{12} = \frac{2e^{i\pi/3}}{3e^{5i\pi/6}} = \frac{2}{3}e^{-3\pi/6} = \frac{2}{3}e^{-\pi/2}$

Exercice 2 : Forme exponentielle

Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{1+i}{1-i}$. On commence par mettre $1+i$ sous forme exponentielle en faisant apparaître son module : $1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}[\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)] = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$. On montre avec un raisonnement similaire que $1-i = \sqrt{2}e^{-i\pi/4}$ et on déduit $z_1 = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2}$
2. $z_2 = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2[\cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3)] = 2e^{i\pi/3}$

3. $z_3 = \frac{-2}{1+i}$ On repart du résultat intérmédiaire de la question 1 : $1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et on note que $-2 = 2e^{i\pi}$ pour déduire le résultat $z_3 = \frac{2e^{i\pi}}{\sqrt{2}e^{i\pi/4}} = \sqrt{2}e^{i3\pi/4}$
4. $z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$ On repart du résultat de la question 2 : $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ et on montre de manière analogue que $\sqrt{3} + i = 2e^{i\pi/6}$. On en déduit $z_4 = \frac{2e^{i\pi/3}}{2e^{i\pi/6}} = e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)} = \frac{\pi}{6}$
5. $z_5 = \sin(x) + i\cos(x)$. z_5 ressemble à une forme exponentielle mais n'en est pas une, il faut du $\cos$ pour la partie réelle et du $\sin$ pour la partie imaginaire. Qu'à cela ne tienne, on sait que $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$ et $\cos(x) = \sin(\pi/2 - x)$ (faites un dessin sur le cercle trigo pour vous en convaincre). On a donc $z_5 = \cos(\pi/2 - x) + i\sin(\pi/2 - x) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

On en déduit facilement le reste des valeurs demandées

1. $z_1^2 = (e^{i\pi/2})^2 = e^{i\pi} - 1$
2. $z_2^4 = \left(2e^{i\pi/3}\right)^4 = 16e^{4i\pi/3} = 16e^{-2i\pi/3} = -8 - i8\sqrt{3}$
3. $z_2^5 + \overline{z_2}^5 = 2\text{Re}(z_2^5) = 2\text{Re}(32e^{5i\pi/3}) = 2 \times 32 \times \cos(5\pi/3) = 64\cos(-\pi/3) = -32$
4. $\frac{z_2^3}{1-i} = \frac{8e^{i3\pi/3}}{1-i} = \frac{-8}{1-i} = \frac{-8(1+i)}{|1-i|^2} = -4 - 4i$

Exercice 3 : Opération sur les nombres complexes
On pose $u = 1 + i$ et $v = 1 + i\sqrt{3}$.
On a vu dans l'exercice précédent que $u = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$ et $v = 2e^{i\pi/3}$. On en déduit les réponses suivantes :

1. $|u| = \sqrt{2}$ et $|v| = 2$
2. $arg(u) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi]$ et $arg(u) = \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$
3. $z = \frac{u}{v} = \frac{(1+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{|1+i\sqrt{3}|^2} = \frac{(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{4}$
4. $z = \frac{u}{v} = \frac{\sqrt{2}e^{i\pi/4}}{2e^{i\pi/3}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{12}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\frac{\pi}{12}) - \frac{i}{\sqrt{2}}\sin(\frac{\pi}{12})$
5. z a pour module $1/\sqrt{2}$ et un de ses arguments est $-\pi/12$.
6. D'après la question 3, $z = \frac{(1+\sqrt{3})+i(1-\sqrt{3})}{4}$. D'après la question 4, $z = \frac{\cos(-\pi/12)}{\sqrt{2}} + i\frac{\sin(-\pi/12)}{\sqrt{2}}$. Par identification des parties réelle et imaginaire de chaque expression,

$$\cos(-\pi/12) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}) \quad \sin(-\pi/12) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$$

On conclut à l'aide des différentes propriétes de $\cos$ et $\sin$ (parité de $\cos$, imparité de $\sin$ et égalités $\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$ et $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$) :

$$\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$$
$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

Exercice 4 : Simplification de nombre complexe
Ecrire sous forme algébrique et puis trigonométrique le nombre complexe ci-dessous :

$$z = \left(\frac{1 + i - \sqrt{3}(i-1)}{1+i}\right)^2$$

Ce nombre a l'air un peu pénible mais certaines parties ressemblent à des quantités déjà vues. On commence par simplifer z sous la forme :

$$z = \left(1 + \sqrt{3}\frac{i-1}{1+i}\right)^2$$

On a déjà vu dans la question 1 de l'exercice 2 que $\frac{i-1}{1+i} = \overline{\left(\frac{i+1}{1-i}\right)} = \overline{e^{i\pi/2}} = \bar{i} = -i$. On a donc $z = (1-i\sqrt{3})^2 = \left(2e^{-i\pi/3}\right)^2$ (voir question 2 de l'exercice 2), c'est à dire $z = 4e^{-2i\pi/3} = -2 - i2\sqrt{3}$

Exercice 5 : Puissance d'un nombre complexe

De façon générale, la forme exponentielle est beaucoup plus pratique pour calculer la puissance d'un nombre complexe

1. Déterminer le module et un argument de $\frac{1+i}{1-i}$. En déduire la valeur de $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2017}$ On a vu précédemment que $z = \frac{1+i}{1-i} = i$ et on sait que $i^4 = 1$. Il suffit donc de trouver le reste de la division entière de 2017 par 4. On a $2017 = 2016 + 1 = 4 \times 504 + 1$ et donc $z^{2017} = i^{2017} = i^{4\times 504+1} = (i^4)^{504} \times i = 1^{504} \times i = i$
2. Déterminer le module et un argument de $1 + i\sqrt{3}$. En déduire la valeur de$\left(1 + i\sqrt{3}\right)^2$ 010 On a déjà vu que $z = 1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\pi/3}$ et on sait que $(e^{i\pi/3})^6 = e^{2i\pi} = 1$. Il faut donc trouver le reste de la division entière de 2010 par 6. On a $2010 = 6 \times 335$ et donc $z^{2010} = \left(2e^{i\pi/3}\right)^{2010} = 2^{2010}\left(e^{i\pi/3}\right)^{2010} = 2^{2010}\left(e^{i\pi/3}\right)^{6\times 355} = 2^{2010}\left(\left(e^{i\pi/3}\right)^6\right)^{355} = 2^{2010} \times 1^{355} = 2^{2010}$
3. Déterminer les puissances n-ièmes de :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad z_2 = \frac{1+i\tan(\theta)}{1-i\tan(\theta)} \quad z_3 = 1 + \cos(\phi) + i\sin(\phi)$$

z_1 peut se réécrire $z_1 = \sqrt{2}e^{i\pi/12}$ d'où on déduit $z_1^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{i\frac{n\pi}{12}}$

z_2 n'est définie que pour $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$). Si c'est le cas, z_2 peut se réécrire $z_2 = \frac{\frac{\cos\theta + i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}}{\frac{\cos\theta - i\sin(\theta)}{\cos(\theta)}} = \frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{\cos(\theta)-i\sin(\theta)} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$ d'où on déduit $z_2^n = e^{2in\theta} = \cos(2n\theta) + i\sin(2n\theta)$

z_3 peut se réécrire $z_3 = 1 + e^{i\phi}$. Ce n'est pas une forme exponentielle mais on peut s'en rapprocher en "factorisant par le demi-angle", c'est à dire en mettant $e^{i\phi/2}$ en facteur : $z_3 = e^{i\phi/2}\left(e^{-i\phi/2} + e^{i\phi/2}\right) = 2\cos(\phi/2)e^{i\phi/2}$. Il est alors plus facile de calculer la puissance sous la forme : $z_3^n = \left(2\cos\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i\frac{\phi}{2}}\right)^n = 2^n\cos^n\left(\frac{\phi}{2}\right)e^{i\frac{n\phi}{2}}$

Exercice 6 : Linéarisation

Linéariser les expressions suivantes

1. $f = \sin^5(x)$ Comme détaillé dans le cours, on utilise les formules d'Euler et de Moivre.

$$
\begin{aligned}
\sin^5(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^5 \\
&= \frac{1}{(2i)^5}\left[(e^{ix})^5 + 5(e^{ix})^4(-e^{-ix})^1 + 10(e^{ix})^3(-e^{-ix})^2\right. \\
&\qquad \left. +10(e^{ix})^2(-e^{-ix})^3 + 5(e^{ix})^1(-e^{-ix})^4 + (-e^{-ix})^5\right] \\
&= \frac{1}{32i}\left[e^{i5x} - 5e^{i3x} + 10e^{ix} - 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} - e^{-5ix}\right] \\
&= \frac{1}{32i}\left[\underbrace{e^{i5x} - e^{-i5x}}_{=2i\sin(5x)} -5\underbrace{\left(e^{i3x} - e^{-i3x}\right)}_{=2i\sin(3x)} +10\underbrace{\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)}_{=2i\sin(x)}\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)\right]
\end{aligned}
$$

   où la deuxième ligne est une application directe du binôme de Newton (une généralisation de l'inégalité remarquable $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2. $g = \cos^3(x)\sin^4(x)$ On procède comme décrit dans le cours en développant d'un côté $\cos^3(x)$ et de l'autre $\sin^4(x)$.

$$
\begin{aligned}
\sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\
&= \frac{1}{(2i)^4}\left[(e^{ix})^4 + 4(e^{ix})^3(-e^{-ix})^1 + 6(e^{ix})^2(-e^{-ix})^2\right. \\
&\qquad \left. +4(e^{ix})^1(-e^{-ix})^3 + (-e^{-ix})^5\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-4ix}\right]
\end{aligned}
$$

   Et on s'arrête là (on ne rassemble pas les termes pour faire apparaître des $\cos$ et des $\sin$ car il faut encore développer $\cos^3(x)$.

$$
\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{2^3}\left[(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2(e^{-ix})^1 + 3(e^{ix})^1(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3\right] \\
&= \frac{1}{8}\left[e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right]
\end{aligned}
$$

Il ne reste plus qu'à multiplier les deux expresssions (sans se tromper) :

$$\begin{aligned}
\cos^3(x)\sin^4(x) &= \frac{1}{16\times 8}\left[e^{i4x} - 4e^{i2x} + 6 - 4e^{-i2x} + e^{-4ix}\right]\left[e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right] \\
&= \frac{1}{128}\left[e^{i7x} - 4e^{i5x} + 6e^{i3x} - 4e^{ix} + e^{-ix}\right. \\
&\quad + 3e^{i5x} - 12e^{i3x} + 18e^{ix} - 12e^{-ix} + 3e^{-i3x} \\
&\quad + 3e^{i3x} - 12e^{ix} + 18e^{-ix} - 12e^{-i3x} + 3e^{-i5x} \\
&\quad \left. + e^{ix} - 4e^{-ix} + 6e^{-i3x} - 4e^{-i5x} + e^{-i7x}\right] \\
&= \frac{1}{128}\left[e^{i7x} - e^{i5x} - 3e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} - 3e^{-i3x} - e^{-i5x} + e^{-i7x}\right] \\
&= \frac{1}{128}\left[\underbrace{e^{i7x} + e^{-i7x}}_{2\cos(7x)} - (\underbrace{e^{i5x} + e^{-i5x}}_{2\cos(5x)}) - 3(\underbrace{e^{i3x} + e^{-i3x}}_{2\cos(3x)}) + 3(\underbrace{e^{ix} + e^{-ix}}_{2\cos(x)})\right] \\
&= \frac{1}{64}\left[\cos(7x) - \cos(5x) - 3\cos(3x) + 3\cos(x)\right]
\end{aligned}$$

Remarque : On aurait pu s'épargner quelques calculs en utilisant l'égalité $\cos(x)\sin(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$ et en développant g sous la forme $g = \frac{1}{8}\sin^3(2x)\sin(x)$.

Remarque : Une façon simple de diagnostiquer une erreur de calcul est la nature de votre résultat : vous partez d'une expression réelle, vous devez aboutir à une expression réelle. S'il vous reste des i dans le résultats, vous avez fait une faute quelque part.

3. $h = \sin^3(x)\cos^2(x)$ On pourrait raisonner comme pour le calcul de g mais on va ruser pour faire moins de calcul en notant que $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$. On a donc $h = \sin^3(x)(1 - \sin^2(x)) = \sin^3(x) - \sin^5(x) = \sin^3(x) - f$. On peut calculer $\sin^3(x)$ comme dans la question 1 :

$$\begin{aligned}
\sin^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{1}{(2i)^3}\left[(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2(-e^{-ix})^1 + 3(e^{ix})^1(-e^{-ix})^2 + (-e^{-ix})^3\right] \\
&= \frac{1}{8i}\left[e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})\right] \\
&= \frac{1}{8i}\left[\underbrace{e^{i3x} - e^{-i3x}}_{=2i\sin(3x)} - 3\underbrace{(e^{ix} - e^{-ix})}_{=2i\sin(x)}\right] \\
&= \frac{1}{4}\left[\sin(3x) - 3\sin(x)\right]
\end{aligned}$$

En combinant les linéarisations de $\sin^3(x)$ et $\sin^5(x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{4}\left[\sin(3x) - 3\sin(x)\right] - \frac{1}{16}\left[\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x)\right] \\
&= \frac{1}{16}\left[-\sin(5x) + 9\sin(3x) - 22\sin(x)\right]
\end{aligned}$$

Exercice 7 : Puissance d'un nombre complexe

Comment choisir l'entier naturel n pour que $\left(\sqrt{3} + i\right)^n$ soit réel ? Imaginaire ?

Comme pour les autres exercices avec des puissances, on commence par écrire le nombre complexe de départ sous forme exponentielle. On a déjà vu que $z = \sqrt{3}+i = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ (voir question 4 de l'exercice 2). On sait donc $z^n = 2^n e^{i\frac{n\pi}{6}}$. À partir de là, on peut raisonner par équivalence :

$$z^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e^{i\frac{n\pi}{6}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = 0 + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 6k \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$
$$z^n \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow e^{i\frac{n\pi}{6}} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow n = 6k + 3 \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

Autrement dit z^n est réel si et seulement si n est multiple de 6 (parfois noté $n \equiv 0\ [6]$) , et imaginaire si et seulement si le reste de la division entière de n par 6 est 3 (parfois noté $n \equiv 3\ [6]$).