Licence FdV - L1
Rappel sur les fonctions usuelles

16 septembre 2019

Contents

1 Fonctions constantes

Définition 1. *f est* constante *sur l'intervalle I lorsqu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in I, f(x) = \lambda$.*

Proposition 1. *Il existe de nombreuses manières différentes de montrer qu'une fonction est constante. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

1. *f est constante sur I*
2. *$\forall (x, y) \in I^2, f(x) = f(y)$*
3. *f est à la fois croissante et décroissante sur I*

De plus, si on sait que f est dérivable sur I, on peut rajouter la propriété:

$$\forall x \in I, f'(x) = 0$$

2 Fonctions affines

Définition 2. *f est* affine *sur I lorsqu'il existe deux réels a et b tels que pour tout $x \in I, f(x) = ax + b$.*

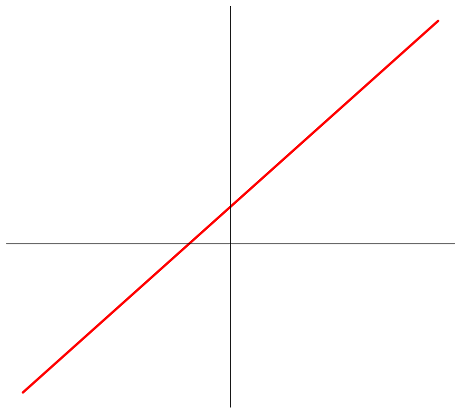
- **Domaine de définition:** $\mathbb{R}$
- **Parité, périodicité, symétrie:** paire si et seulement si $a = 0$ (fonction constante) et impaire si et seulement si $b = 0$. Périodique si et seulement si $a = 0$
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = a$
  - Si $a > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$			$+\infty$
		$\nearrow$	
	$-\infty$		

si $a > 0$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$		
		$\searrow$	
			$-\infty$

- **Tangentes particulières:** $\mathcal{C}_f$ est une droite
- **Branches infinies:** Idem
- **Graphe:** (exemple: $f(x) = x/2 + 1$)



3 Fonctions $x \mapsto x^n$ avec $n \geq 2$ entier

Soit $n \geq 2$ un entier naturel et f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^n$.

- **Domaine de définition:** $\mathbb{R}$
- **Parité, périodicité, symétrie:** paire si et seulement si n est pair et impaire si et seulement si n est impaire. Jamais périodique.
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = nx^{n-1}$
  - Signe de f': Si n est impair, $\forall x \neq 0, f'(x) > 0$.
    Si n est pair: $\forall x > 0, f'(x) > 0$ et $\forall x < 0, f'(x) < 0$.

Si n est impair

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$			$+\infty$
		$\nearrow$	
	$-\infty$		

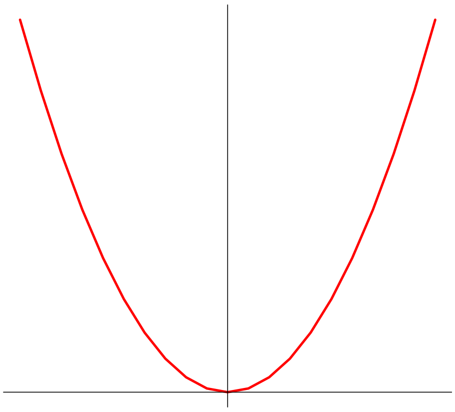
si n est pair

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			0		

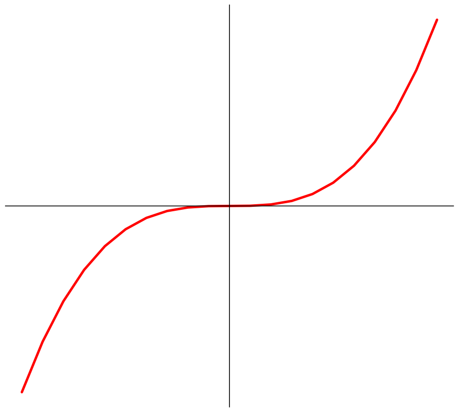
- **Tangentes particulières:** $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale en 0.
- **Branches infinies:** En $-\infty$ et $+\infty$, branches paraboliques d'axes (Oy)

- **Graphe:**

Pour n pair (ex: $f(x) = x^2$)



Pour n impair (ex: $f(x) = x^3$)



4 Fonctions $x \mapsto x^{-n}$ avec $n \geq 1$ entier

Soit $n \geq 1$ un entier naturel et f définie sur $\mathbb{R}^\star$ par $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

- **Domaine de définition:** $\mathbb{R} - \{0\}$
- **Parité, périodicité, symétrie:** paire si et seulement si n est pair et impaire si et seulement si n est impaire. Jamais périodique.
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{0\}$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = -nx^{-n-1} = \frac{n}{x^{n+1}}$
  - **tableau de variation si n pair**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$-$
$f(x)$	$0 \nearrow +\infty$	‖	$+\infty \searrow 0$

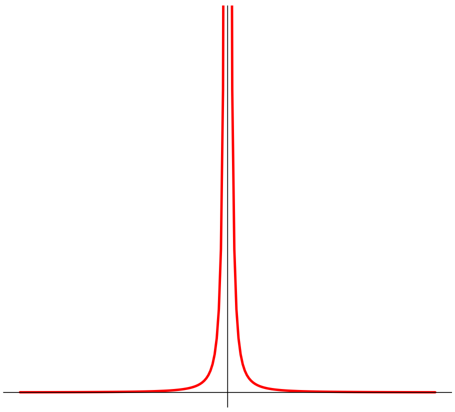
tableau de variation si n impair

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	‖	$-$
$f(x)$	$0 \searrow 0$	‖	$+\infty \searrow 0$

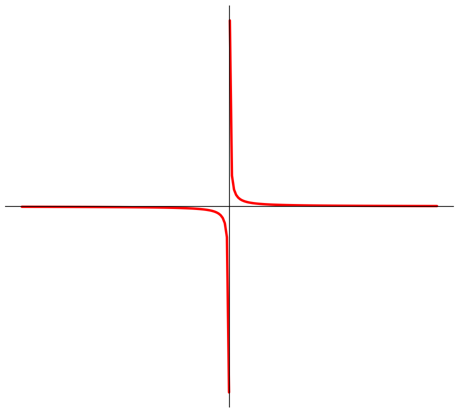
Attention: Dans le cas n impair, f est strictement décroissante sur chaque intervalle $\mathbb{R}^\star_-$ et $\mathbb{R}^\star_+$ mais pas globalement sur $\mathbb{R}^\star$ (par exemple $f(-1) < f(1)$), bien que sa dérivée soit strictement négative sur $\mathbb{R}^\star$. Cela est du au fait que $\mathbb{R}^\star$ n'est pas un intervalle.

- **Tangentes particulières:** Aucune.
- **Branches infinies:** Asymptote verticale en $x = 0$ et asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $+\infty$ et $-\infty$.
- **Graphe:**

Pour n pair (ex: $f(x) = x^{-2}$)



Pour n impair (ex: $f(x) = x^{-1}$)



5 Logarithme

5.1 Définitions et propriétés générales

Définition 3. *ln (logarithme népérien) est la seule fonction f définie sur $(0, +\infty)$ vérifiant les deux propriétés:*

1. *pour tout $x \in (0, +\infty), f'(x) = \frac{1}{x}$*
2. *$f(1) = 0$.*

Remarque 1. *Par composition, la dérivée de $x \mapsto \ln(|x|)$ sur $\mathbb{R}^\star$ est $x \mapsto \frac{1}{x}$.*

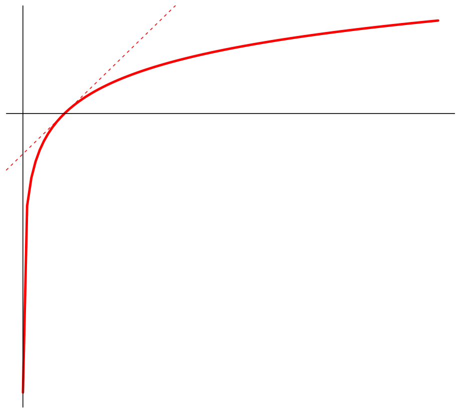
Proposition 2. *Si $x > 0$ et $y > 0$, alors $\ln(\times y) = \ln(x) + \ln(y)$*

5.2 Étude de la fonction ln

- **Domaine de définition:** $(0, +\infty)$
- **Parité, périodicité, symétrie:** Aucune
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $(0, +\infty)$
  - $\forall x \in (0, +\infty), \ln'(x) = 1/x > 0$

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$	‖	$-$
$\ln(x)$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

- **Tangentes particulières:** en 1, $y = x - 1$.
- **Branches infinies:** Asymptote verticale en $x = 0$. En $+\infty$, branche parabolique d'axe (Ox).
- **Graphe:**



6 Exponentielle

6.1 Définitions et propriétés générales

Théorème 1. *ln (logarithme népérien) est bijective de* $(0, +\infty)$ *sur* $\mathbb{R}$ *(conséquence du théorème de la bijection,* ln *est continue et strictement croissante). Sa réciproque s'appelle* fonction exponentielle *et se note* $\exp : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$.

Proposition 3. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

1. $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
2. $\exp(0) = 1$
3. $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$
4. *la fonction* $\exp$ *est dérivable en* x *et on a* $\exp'(x) = \exp(x)$.

Proposition 4. *Pour tout rationnel* r*, on a* $(\exp(r)) = (\exp(1))^r$.

Au vu de la proposition précédente, on peut étendre la notation d'exposant (définie jusqu'à alors uniquement pour des rationnels) aux réels.

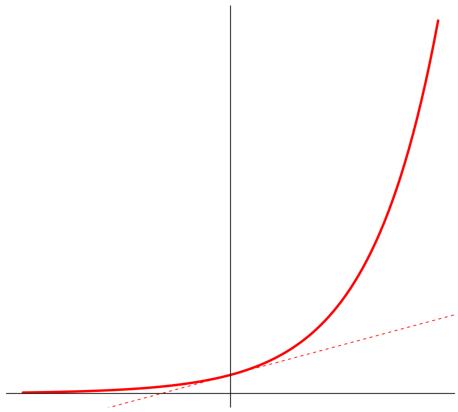
On note désormais $e := \exp(1)$ et on pose $\forall x \in \mathbb{R}, e^x := \exp(x)$.

6.2 Étude de la fonction exp

- **Domaine de définition:** $\mathbb{R}$
- **Parité, périodicité, symétrie:** Aucune
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \exp'(x) = \exp(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	$+$	
$\exp(x)$	$0 \nearrow$	$+\infty$

- **Tangentes particulières:** en 0, $y = x + 1$.
- **Branches infinies:** Asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$. En $+\infty$: branche parabolique d'axe (Oy).
- **Graphe:**



7 Puissances non entières

Définition 4. *Pour* $a > 0$ *et* $x \in \mathbb{R}$*, on pose* $a^x := e^{\ln(a)x}$.

Proposition 5. *Rappels. Soient* a *et* b *deux réels strictement positifs et* x *et* y *deux réels quelconques. On a:*

$a^0 = 1$	$a^{x+y} = a^x \times a^y$	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
$a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y}$	$(ab)^x = (a^x) \times (b^x)$	$(a^x)^y = a^{xy}$
$a^1 = a$	$(a^x)^{\frac{1}{x}} = a$	$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

7.1 Étude des fonctions $f : x \mapsto a^x$ où $a > 0$ est constant

On remarque que $f(x) = a^x = e^{\ln(a)x}$. Les remarques suivantes généralisent le cas de l'exponentielle.

- **Domaine de définition:** $\mathbb{R}$
- **Parité, périodicité, symétrie:** Aucune
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(e^{\ln(a)x}\right)' = \ln(a) \times e^{ln(a)x} = \ln(a) \times a^x$
    En particulier, $f'(x)$ est du signe de $\ln(a)$.

Si $a = 1$ f est constante égale à 1

Si $a > 1$

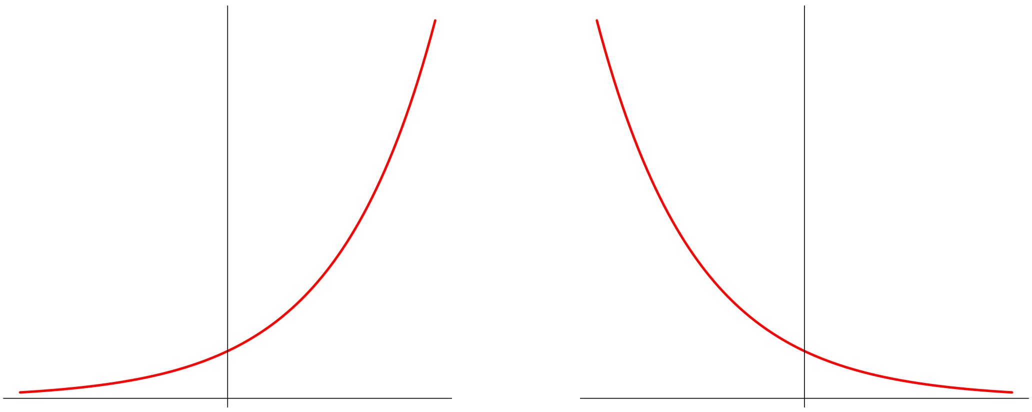
x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Si $a \in (0, 1)$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

- **Tangentes particulières:** Aucune.
- **Branches infinies** ($a \neq 1$)**:**
  Si $a > 1$**:** Asymptote horizontale $y = 0$ en $-\infty$. En $+\infty$: branche parabolique d'axe (Oy).
  Si $a \in (0, 1)$**:** Branche parabolique d'axe $(0y)$ en $-\infty$. En $+\infty$: asymptote horizontale $y = 0$.
- **Graphe:**

Pour $a > 1$ (ex: $a = 2$) Pour $a \in (0, 1)$ (ex: $a = 1/2$)



7.2 Étude des fonctions $f : x \mapsto x^\alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$ est constant

On remarque que $f(x) = x^a = e^{a\ln(x)}$. Les remarques suivantes généralisent les fonctions $x \mapsto x^n$.

- **Domaine de définition:** $(0, +\infty)$
- **Parité, périodicité, symétrie:** Aucune
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $(0, +\infty)$
  - $\forall x \in (0, +\infty), f'(x) = \left(e^{\alpha\ln(x)}\right)' = \alpha\frac{1}{x} \times e^{\alpha\ln(x)} = \alpha x^{\alpha-1}$
    En particulier, $f'(x)$ est du signe de α.

Si $\alpha = 1$ f est constante égale à 1

Si $\alpha > 0$

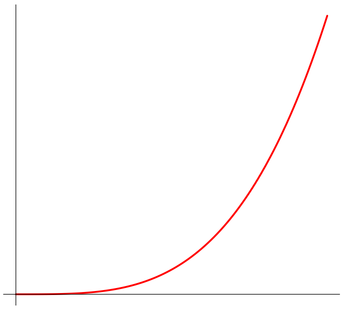
x	0		$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Si $\alpha < 0$

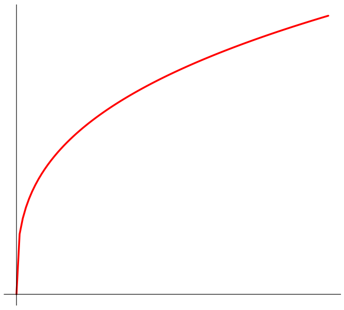
x	0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

- **Tangentes particulières:** Aucune.
- **Branches infinies ($\alpha \neq 0$):**
  Si $\alpha < 0$: Asymptote verticale $x = 0$ en 0. En $+\infty$: asymptote horizontale $y = 0$
  Si $\alpha > 0$: On a $\lim_{+\infty} f = +\infty$. On doit donc étudier $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} x^{\alpha-1}$. On a donc:
  - Si $\alpha > 1$, la limite vaut $+\infty$: branche parabolique d'axe (Oy)
  - Si $\alpha = 1$, $f(x) = x$, déjà vu.
  - Si $\alpha \in (0, 1)$, la limite vaut 0: branche parabolique d'axe (Ox)
- **Graphe (pour $\alpha \notin \{0, 1\}$):**

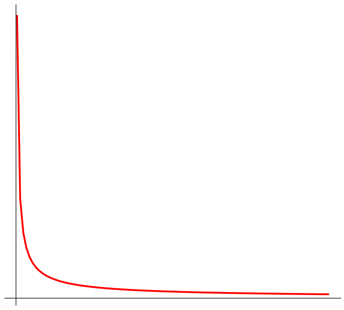
Pour $\alpha > 1$ (ex: $\alpha = 3.5$)



Pour $\alpha \in (0,1)$ (ex: $\alpha = 1/3$)



Pour $\alpha < 0$ (ex: $\alpha = -0.75$)



7.3 Cas particulier des fonctions $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ avec $n \geq 2$ entier

- **Domaine de définition:** Pour n pair, f est définie sur $\mathbb{R}_+$. Pour tout $x \geq 0$, $f(x)$ est le seul réel **positif** tel que $f(x)^n = x$.
  Pour n impair, f est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier. $f(x)$ est alors le seul réel tel que $f(x)^n = x$.
  On a clairement:
  - Pour n pair: $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x^{1/n}$.
  - Pour n impair: $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) = x^{1/n}$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-, f(x) = -(-x)^{1/n}$.

  Remarque: f est la réciproque de $x \mapsto x^n$ sur un intervalle où cette dernière est bijective. Notez la différence dans le domaine de définition suivant la parité de f. Ceci est dû au fait que $x \mapsto x^n$ est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ quand n est impair mais seulement de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ quand n est pair (en particulier, pour n pair, $x \mapsto x^n$ n'est pas injective sur $\mathbb{R}$ tout entier).

- **Parité, périodicité, symétrie:** Si n est impaire, f est impaire. Si n est paire, f n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$ et ne peut donc être ni paire, ni impaire. Jamais périodique.

- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - * Continue et dérivable sur $\mathcal{D}_f - \{0\}$
    * Continue mais **non dérivable** en 0.
  - * Pour n pair, $\forall x \in (0, +\infty), f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}$.
    * Pour n impair, $\forall x \in (0, +\infty), f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}$ et $\forall x \in (-\infty, 0), f'(x) = \frac{1}{n}(-x)^{\frac{1-n}{n}}$.

    Dans tous les cas, $f' > 0$ donc f' est strictement croissante sur $\mathcal{D}_f$. **Remarque:** On peut être tenté d'utiliser le résultat général vu sur $x \mapsto x^\alpha$ (avec $\alpha \in (0,1)$) pour calculer la dérivée et dire:

    $$\forall x \in \mathcal{D}_f, f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1-n}{n}}$$

    Ceci est parfaitement juste pour n pair. Pour n impair en revanche, ce n'est vrai que pour $x \geq 0$. La fonction $x \mapsto x^\alpha$ repose en effet sur le logarithme et n'est pas définie pour $x < 0$. On peut aussi noter que la formule générale appliquée en $x < 0$ donne un résultat négatif, ce qui contradirait la stricte croissance de la fonction.

    Si n pair

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 $\nearrow$	$+\infty$

    Si n impair

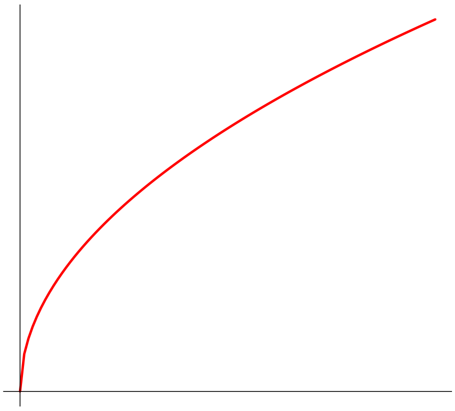
x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

- **Tangentes particulières:** Aucune.

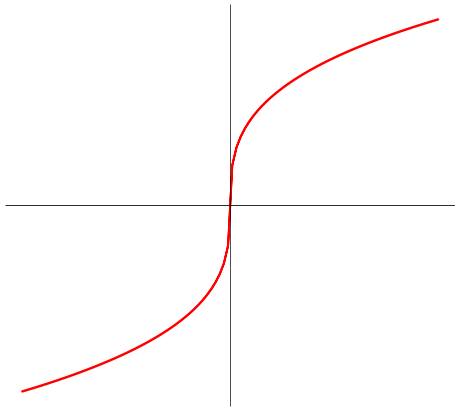
- **Branches infinies:** $\mathcal{C}_f$ admet toujours une branche parabolique d'axe (Ox) en $+\infty$. De plus, si n est impaire, f admet une branche parabolique d'axe (Ox) en $-\infty$.

- **Graphe:**

Pour n pair (ex: $n = 2$)

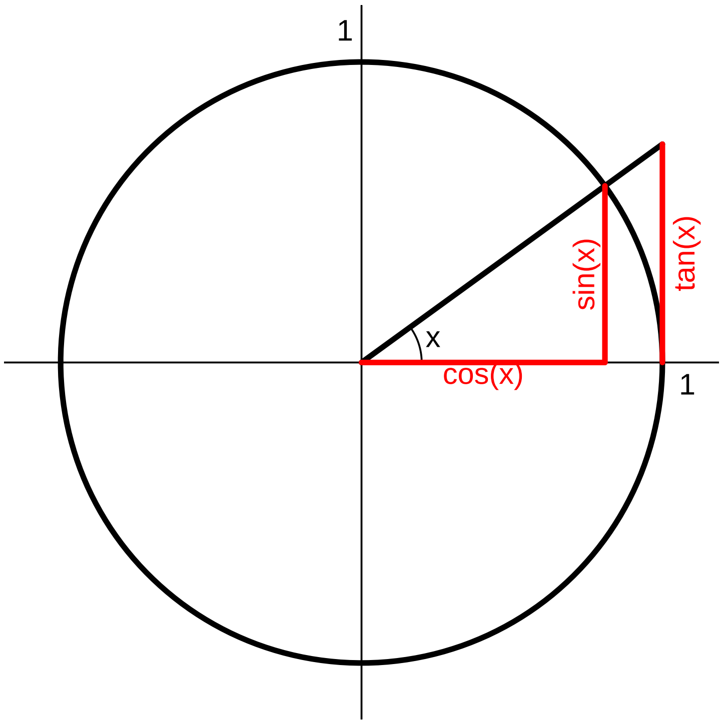


Pour n impair (ex: $n = 3$)



8 Fonctions trigonométriques

On rappelle la définition géométrique des fonctions trigonométriques:



Proposition 6. *Rappels. On a:*

1. $\sin' = \cos$
2. $\cos' = -\sin$
3. $\tan' = 1 + \tan^2 = \dfrac{1}{\cos^2}$

On peut montrer avec le théorème de la bijection la proposition suivante:

Proposition 7. *Tout ce qui suit est admis.*

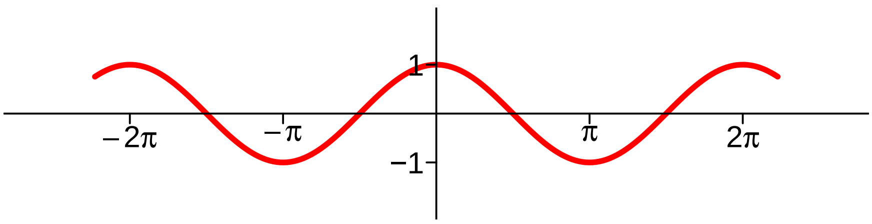
- *La fonction* $\sin$ *établit une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *sur* $[-1, 1]$*. Sa réciproque est appelée* Arc sinus *et est notée* $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- *La fonction* $\cos$ *établit une bijection de* $[0, \pi]$ *sur* $[-1, 1]$*. Sa réciproque est appelée* Arc cosinus *et est notée* $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$
- *La fonction* $\tan$ *établit une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *sur* $\mathbb{R}$*. Sa réciproque est appelée* Arc tangente *et est notée* $\arctan : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

8.1 Étude de la fonction cos

- **Domaine de définition:** $\mathbb{R}$
- **Parité, périodicité, symétrie:** cos est paire et 2π-périodique. On se contentera donc de son tableau de variations sur $[-\pi, \pi]$
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x) \left| \begin{array}{lll} > 0 & \text{sur} & (-\pi, 0) \\ < 0 & \text{sur} & (0, \pi) \end{array} \right.$

x	$-\pi$		0		$+\pi$
$\cos'(x)$		$+$	0	$+$	
$\cos(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

- **Tangentes particulières:** En $2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$): $y = 1$ et en $(2k+1)\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$): $y = -1$.
- **Branches infinies:** Aucune
- **Graphe:**



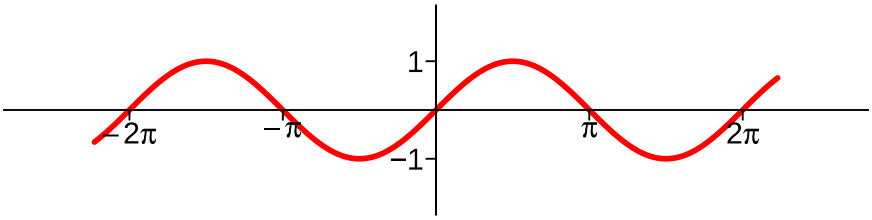
8.2 Étude de la fonction sin

- **Domaine de définition:** $\mathbb{R}$
- **Parité, périodicité, symétrie:** sin est impaire et 2π-périodique. On se contentera donc de son tableau de variations sur $[-\pi, \pi]$
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = -\cos(x) \left| \begin{array}{lll} > 0 & \text{sur} & (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ < 0 & \text{sur} & (-\pi, -\frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi) \end{array} \right.$

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		$+\pi$
$\sin'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- **Tangentes particulières:** En 0: $y = x$.
  En $\pi/2 + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$): $y = 1$
  En $\pi/2 + (2k+1)\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$): $y = -1$.

- **Branches infinies:** Aucune
- **Graphe:**

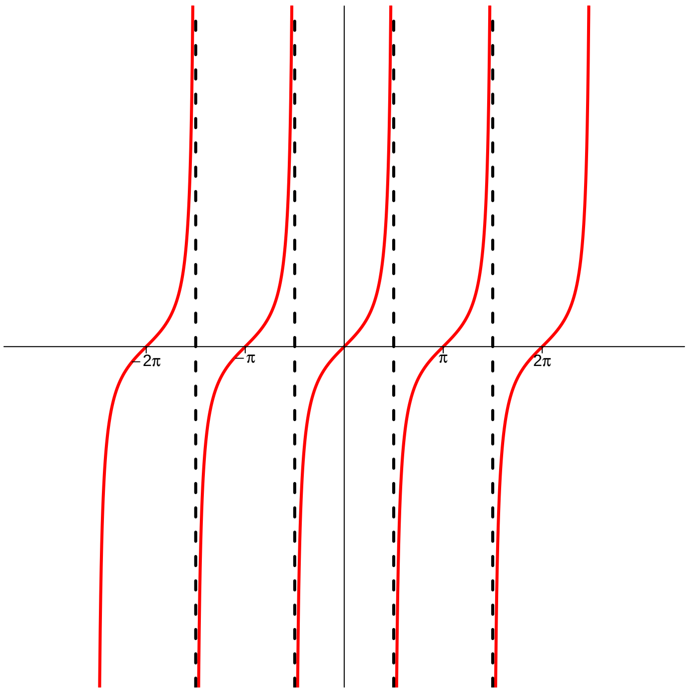


8.3 Étude de la fonction tan

- **Domaine de définition:** $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- **Parité, périodicité, symétrie:** tan est impaire et π-périodique. On se contentera donc de son tableau de variations sur $(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $\mathbb{R} - \{\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
  - $\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$

x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
$\tan(x)$	$\Vert$	$-\infty \nearrow +\infty$	$\Vert$

- **Tangentes particulières:** En 0: $y = x$.
- **Branches infinies:** Asymptote verticale en tous les x de la forme $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$
- **Graphe:**



On peut montrer avec le théorème de la bijection la proposition suivante:

Proposition 8. *Tout ce qui suit est admis.*

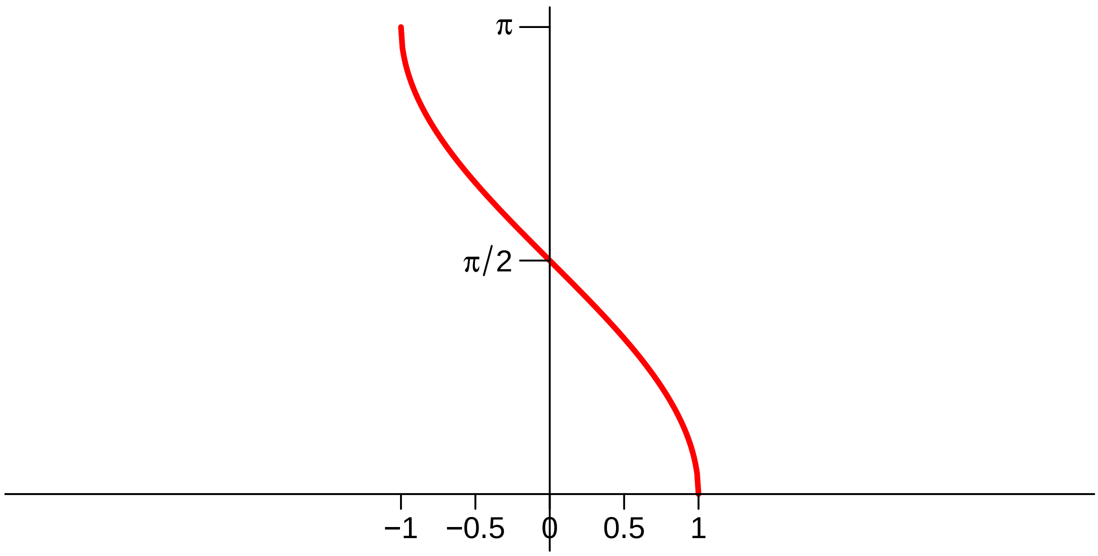
- *La fonction* sin *établit une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *sur* $[-1, 1]$. *Sa réciproque est appelée* Arc sinus *et est notée* arcsin : $[-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
- *La fonction* cos *établit une bijection de* $[0, \pi]$ *sur* $[-1, 1]$. *Sa réciproque est appelée* Arc cosinus *et est notée* arccos : $[-1, 1] \to [0, \pi]$
- *La fonction* tan *établit une bijection de* $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ *sur* $\mathbb{R}$. *Sa réciproque est appelée* Arc tangente *et est notée* arctan : $\mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

8.4 Étude de la fonction arccos

- **Domaine de définition:** $[-1, 1]$, à valeurs dans $[0, \pi]$
- **Parité, périodicité, symétrie:** Aucune.
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $(-1, 1)$
  - $\forall x \in (-1, 1), \cos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} < 0$ sauf en 0

x	-1		0		$+1$
$\arccos'(x)$	$\|$	$-$	0	$-$	$\|$
$\arccos(x)$	π	$\searrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	0

- **Tangentes particulières:** En -1: $x = -1$, en 1: $x = 1$ et en 0: $y = \pi/2 - x$.
- **Branches infinies:** Aucune
- **Graphe:**



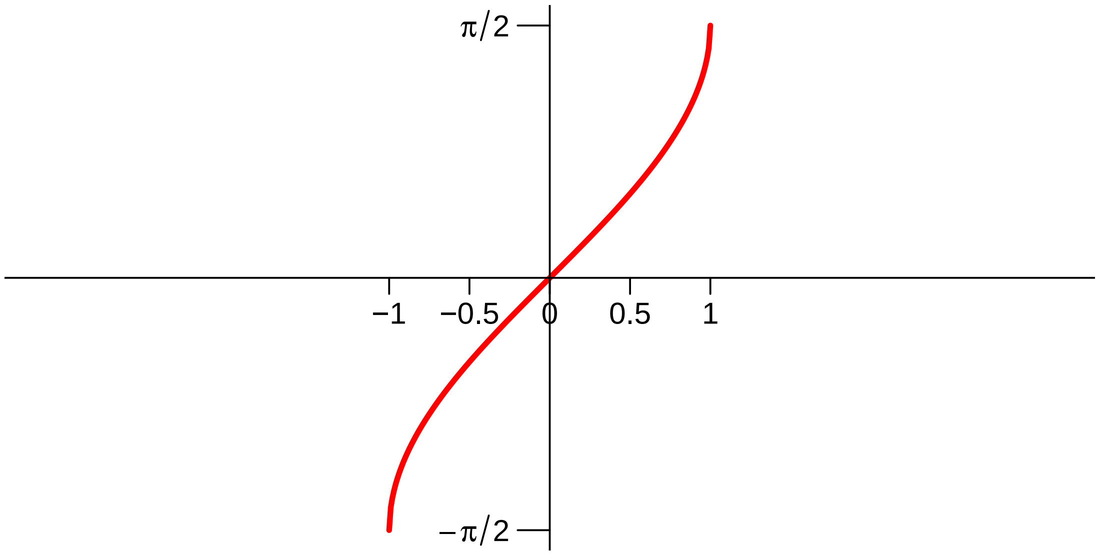
8.5 Étude de la fonction arcsin

- **Domaine de définition:** $[-1, 1]$, à valeurs dans $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- **Parité, périodicité, symétrie:** arcsin est impaire.
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue sur $[-1, 1]$, dérivable sur $(-1, 1)$

- $\forall x \in (-1,1), \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} > 0$ sauf en 0

x	-1		0		$+1$
$\arcsin'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$+$	$\Vert$
$\arcsin(x)$	$\frac{-\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

- **Tangentes particulières:** En -1: $x = -1$, en 1: $x = 1$ et en 0: $y = x$.
- **Branches infinies:** Aucune
- **Graphe:**

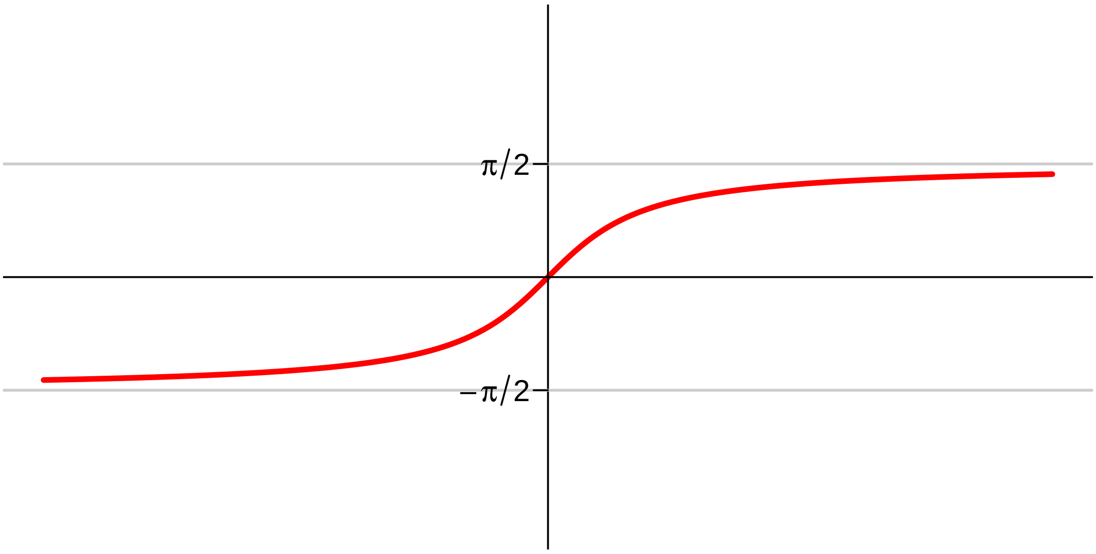


8.6 Étude de la fonction arctan

- **Domaine de définition:** $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
- **Parité, périodicité, symétrie:** arctan est impaire.
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $\mathbb{R}$
  - $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\arctan'(x)$		$+$	0	$+$	
$\tan(x)$	$\frac{-\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$

- **Tangentes particulières:** En 0, $y = x$.
- **Branches infinies:** Asymptote horizontale en $-\infty$, $y = -\pi/2$ et en $+\infty$, $y = \pi/2$.
- **Graphe:**



9 Valeur absolue

9.1 Définition et généralités

Définition 5. *La valeur absolue de x est le nombre* ***positif*** $|x|$ *défini par:*

$$|x| := \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Proposition 9. *On a les propriétés suivantes:*

1. *Pour tout réel x, $-|x| \leq x \leq |x|$*
2. *Pour tout réel x, $|-x| = |x|$*
3. *Pour tout réel x, $|x| = \max(x, -x)$*
4. *Pour tous réels x et y, $|xy| = |x| \times |y|$*
5. *Pour tous réels x et y, $|x+y| \leq |x| + |y|$*

Remarque 2. *Si A et B sont des expressions, pour montrer l'inégalité $|A| \leq B$, on peut montrer $A \leq B$ et $-A \leq B$. Il n'est dans ce cas pas nécessaire de se poser la question du signe de A. De façon générale, pour étudier une fonction (ou résoudre une équation) faisant intervenir des valeurs absolues, le plus simple est généralement de faire disparaître les valeurs absolues en*

1. *étudiant le signe du contenu de chaque valeur absolue*
2. *découpant l'étude (ou la résolution) en sous-cas pour chacun desquels on peut faire disparaître les valeurs absolues.*

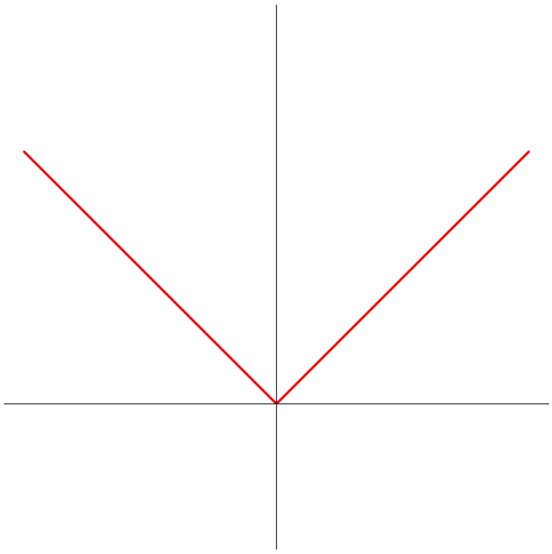
9.2 Étude de la fonction valeur absolue

- **Domaine de définition:** $\mathbb{R}$
- **Parité, périodicité, symétrie:** f est paire.
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ (non dérivable en 0).
  - $\forall x > 0, f'(x) = 1$ et $\forall x < 0, f'(x) = -1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert'$		$-$	$\Vert$	$+$	
$\lvert x\rvert$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- **Tangentes particulières:** En 0, il y a deux demi-tangentes différentes, $y = x$ à droite et $y = -x$ à gauche.
- **Branches infinies:** $x \mapsto |x|$ est une droite par morceaux.

- **Graphe:**



10 Partie entière

10.1 Définition et généralités

Définition 6. *La partie entière de x est l'unique entier* ***relatif*** *noté $\lfloor x \rfloor$ ou $E(x)$ tel que :*

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Ainsi, si $n \in \mathbb{Z}$, on a $\forall x \in [n, n+1)$, $\lfloor x \rfloor = n$.

Proposition 10. *On a les propriétés suivantes:*

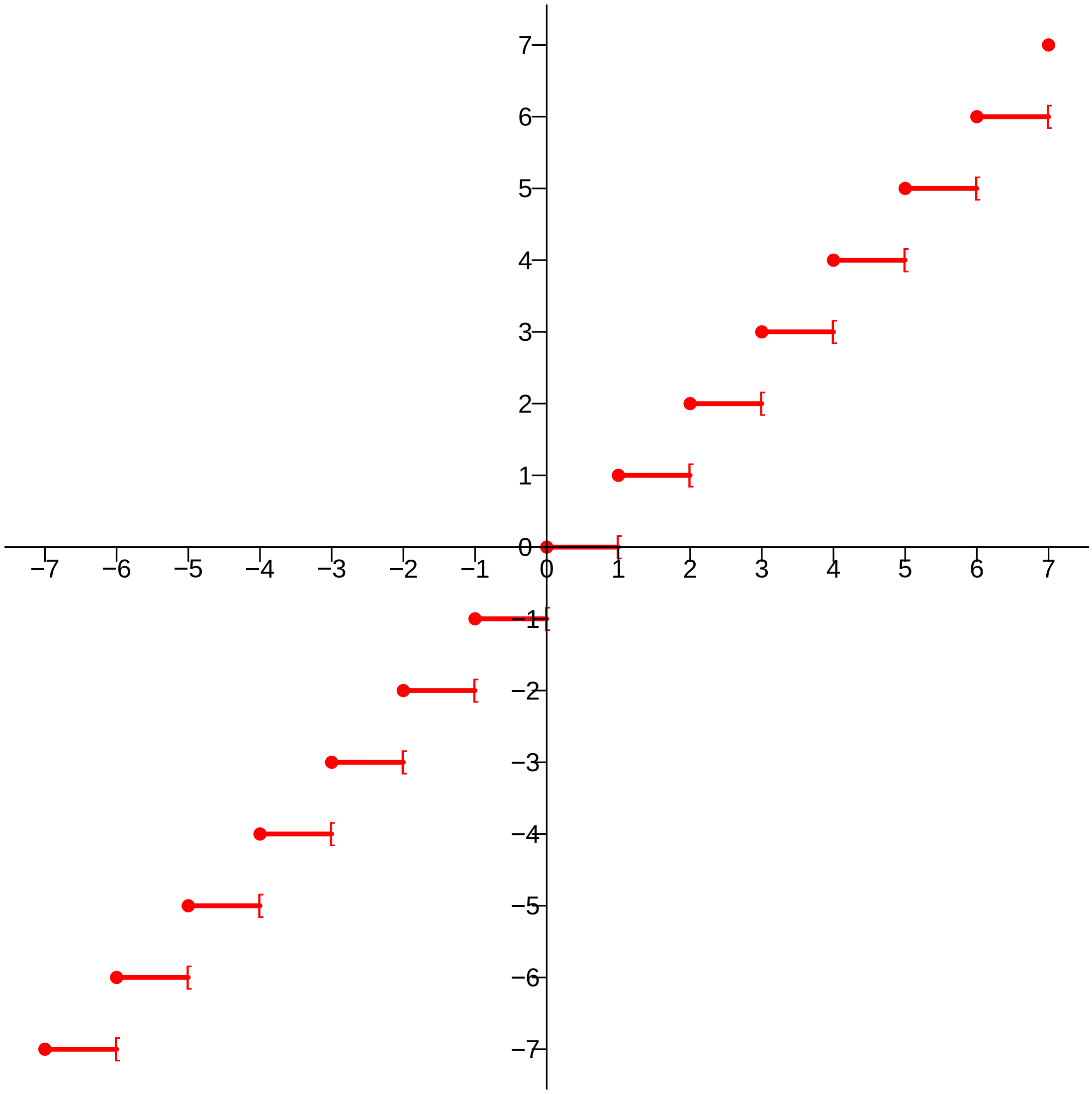
1. *Pour tout réel x, $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$*
2. $\lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty$ *et* $\lim_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty$

Remarque 3. *Pour étudier une fonction (ou résoudre une équation) qui fait intervenir une ou des partie(s) entière(s) d'expression(s), le plus simple est généralement de faire disparaître les parties entières:*

1. *en ramenant les expressins dans des parties entières à des valeurs comprises dans un intervalle de la forme $[n, n+1)$*
2. *en découpant l'étude (ou la résolution) en sous-cas pour chacun desquels on peut faire disparaître les parties entières.*

10.2 Étude de la fonction valeur absolue

- **Domaine de définition:** $\mathbb{R}$
- **Parité, périodicité, symétrie:** Aucun.
- **Continuité, dérivabilité, limites aux bornes, variations:**
  - Continue et dérivable sur $\mathbb{R}\mathbb{Z}$ (la fonction est constante sur chaque intervalle de la forme $(n, n+1)$ pour $n \in \mathbb{Z}$). f est de plus continue à droite en n ($\in \mathbb{Z}$) mais pas à gauche.
  - La fonction est constante par morceaux, son tableau de variations est peu intéressant.
- **Tangentes particulières:** Aucune, la fonction est constante par morceaux.
- **Branches infinies:** Directions asymptotiques $y = x$ en $+\infty$ et $-\infty$ (au sens où $\lfloor x \rfloor \sim x$ à l'infini) mais pas d'asymptotes à proprement parler.
- **Graphe:**


7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 0 1 2 3 4 5 6 7