

## Partiel de mathématiques (partie logique)

### 1 Ensembles

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. Démontrer l'équivalence :

$$A \cup B = A \cap B \iff A = B$$

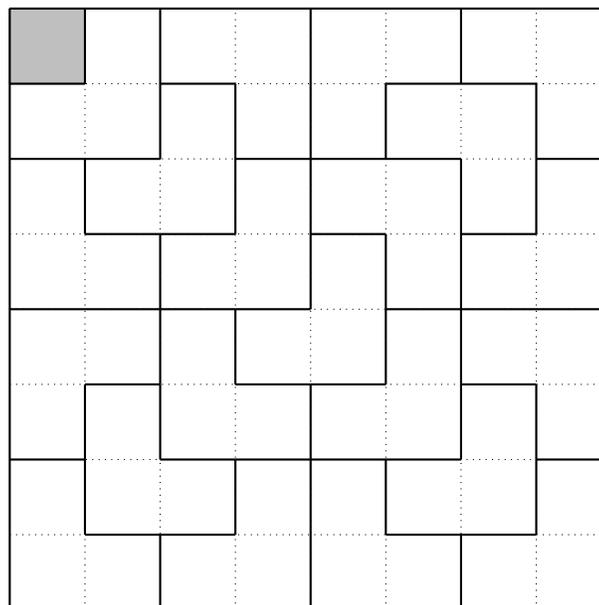
### 2 Récurrence

1. Étudier le signe de  $(x + 1)(x^2 - x - 1)$  en fonction de  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la factorielle de  $n$ , notée  $n!$ , par :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n - 1) \times n$$

Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 4$ ,  $n! \geq n^2$ . On pourra utiliser la question précédente.

3. Soit  $P(n)$  le prédicat affirmant qu'« une grille de taille  $2^n \times 2^n$  peut être recouverte de tuiles en forme de L de façon à ce que toutes les cases soient recouvertes, excepté celle du coin supérieur gauche. » Voici un exemple d'un tel pavage pour  $n = 3$ , avec une grille de taille  $8 \times 8$  :



Montrer par récurrence que  $P(n)$  est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .