14 avril 2020

Partiel de Mathématiques (partie analyse)

Tous les exercices sont indépendants. Les exercices sont triés par ordre de difficulté croissante. Les réponses doivent être justifiées (éventuellement de façon concise) : les réponses (même correctes) non-justifiées ne donneront lieu à **aucun point**. Le barème est donné à titre **indicatif**.

Exercice 1 : DL et limites, 6 points
On considére $a, b > 0$. Calculez :

$$\text{(A)} \lim_{x\to 6} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x-5)} \quad \text{(B)} \lim_{x\to b} \frac{x^a - b^a}{a^x - a^b} \quad \text{(C)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{x^3}$$

Exercice 2 : Intégration et probabilités (I), 2 points
Soit $a > 0$. On considère la fonction triangulaire f_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \begin{cases} Cx & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ C(2a - x) & \text{si } a \leq x \leq 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une variable aléatoire X est dite triangulaire de paramètre $a > 0$ si sa densité est f_a. Le moment d'ordre k de X, noté $\mathbb{E}[X^k]$ est défini par $\mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_a(x)dx$.

— Calculez C pour que f_a soit bien une densité de probabilité, c'est à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx = 1$.
— Calculez les moments d'ordre 1 et 2 de X.

Exercice 3 : Intégration et probabilités (II), 3 points
Soit $a > 0$. On considère la fonction triangulaire f_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = Ce^{-a|x|}$$

Une variable aléatoire X_a est dite de laplace de paramètre $a > 0$ si sa densité est f_a.

— Calculez C pour que $f_a(x)$ soit bien une densité de probabilité.
— Calculez les moments d'ordre 1 et 2 de X_a.

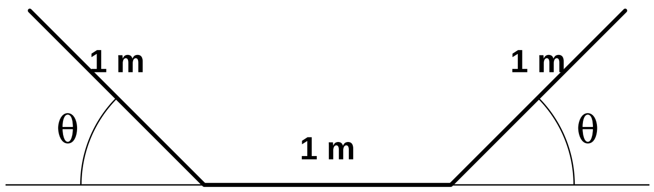
Exercice 4 : Dérivées partielles, 3 points
On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto x\cos(y) - y\cos(x)$$

Trouver l'ensemble $\mathcal{C}$ des points (x, y) tels que $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$. Puis représenter $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

Problème 1 : Géométrie et optimisation, 5 points

On considère une tôle de métal rectangulaire de $l = 3$ mètres de large et $L = 5$ mètres de long. On plie la tôle de métal dans sa largeur comme suit (vue de coupe) pour former une bassine de L mètres de long :



Les faces avant et arrières sont fermées, indépendamment de l'angle θ choisi. Quelle est la valeur de θ qui maximise le volume de la bassine ? Quel est le volume correspondant ?