14 avril 2020

Partiel de Mathématiques (partie analyse)

Tous les exercices sont indépendants. Les exercices sont triés par ordre de difficulté croissante. Les réponses doivent être justifiées (éventuellement de façon concise) : les réponses (même correctes) non-justifiées ne donneront lieu à **aucun point**. Le barème est donné à titre **indicatif**.

Exercice 1 : DL et limites, 6 points
On considére $a, b > 0$. Calculez :

$$\text{(A)} \lim_{x\to 6} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x-5)} \quad \text{(B)} \lim_{x\to b} \frac{x^a - b^a}{a^x - a^b} \quad \text{(C)} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{x^3}$$

On distinguera limite à gauche et à droite si nécessaire.

A On se ramène à un DL en 0 comme d'habitude en faisant le changement de variable $X = x-6$. On a bien $X \to 0$ quand $x \to 6$ et on peut donc écrire :

$$\lim_{x\to 6} \frac{\sin(\pi x)}{\ln(x-5)} = \lim_{X\to 0} \frac{\sin(X\pi + 6\pi)}{\ln(1+X)}$$

En utilisant la périodicité de $\sin$ en les DLs classiques de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$ en 0, l'expression devient :

$$\frac{\sin(X\pi + 6\pi)}{\ln(1+X)} = \frac{\pi X + o(X)}{X + o(X)} = \frac{\pi + o(1)}{1 + o(1)} \xrightarrow[X\to 0]{} \pi$$

B Cette expression est un peu exotique et même des fonctions puissances et des fonctions logarithmes. On factorise par le terme dominant au numérateur (b^a) et au dénominateur (a^b) avant de passer sous forme exponentielle et de changer de variable en posant $X = x - b$ pour se ramener à un DL en 0. On commence par le numérateur.

$$\begin{aligned} x^a - b^a &= b^a\left((x/b)^a - 1\right) = b^a\left(e^{a\ln(x/b)} - 1\right) = b^a\left(e^{a\ln(1+X/b)} - 1\right) \\ &= b^a\left(e^{aX/b + o(X)} - 1\right) = b^a\left(\frac{aX}{b} + o(X)\right) \end{aligned}$$

avant de faire de même pour le dénominateur

$$\begin{aligned} a^x - a^b &= a^b\left(a^{x-b} - 1\right) = a^b\left(e^{X\ln(b)} - 1\right) \\ &= a^b\left(1 + X\ln(b) + o(X) - 1\right) = a^b\left(X\ln(b) + o(X)\right) \end{aligned}$$

En substituant les deux DLs dans la fraction de départ, on obtient :

$$\lim_{x\to b} \frac{x^a - b^a}{a^x - a^b} = \lim_{X\to 0} \frac{b^a\left(\frac{aX}{b} + o(X)\right)}{a^b\left(X\ln(b) + o(X)\right)} = \frac{b^{a-1}}{a^{b-1}} \frac{1}{\ln(b)}$$

C Un DL à l'ordre 1 ne suffit pas à déterminer le terme dominant du numérateur car e^x et $(1-x)^{-1}$ ont mêmes DLs d'ordre 1. Il faut donc faire un DL en 0 à l'ordre 2 du numérateur :

$$e^x - \frac{1}{1-x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \left(1 + x + x^2\right) + o(x^2) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Ce qui nous permet de réécrire la fonction sous la forme :

$$\frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{x^3} = \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^3} = \frac{-\frac{1}{2} + o(1)}{x}$$

Cette fonction n'a pas de limites en 0 mais admet une limite à gauche et une limite à droite en 0.

$$\lim_{0^-} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{x^3} = +\infty \qquad \lim_{0^+} \frac{e^x - \frac{1}{1-x}}{x^3} = -\infty$$

Exercice 2 : Intégration et probabilités (I), 2 points

Soit $a > 0$. On considère la fonction triangulaire f_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = \begin{cases} Cx & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ C(2a - x) & \text{si } a \leq x \leq 2a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Une variable aléatoire X est dite triangulaire de paramètre $a > 0$ si sa densité est f_a. Le moment d'ordre k de X, noté $\mathbb{E}[X^k]$ est défini par $\mathbb{E}[X^k] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f_a(x)dx$.

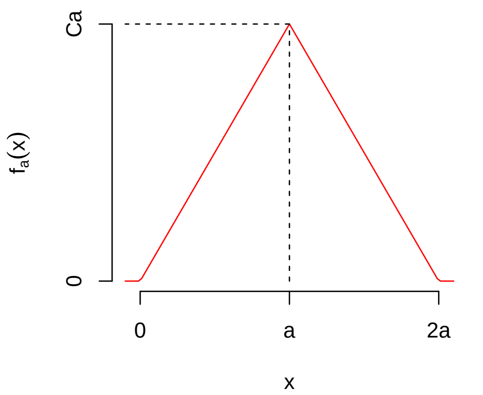
— Calculez C pour que f_a soit bien une densité de probabilité, c'est à dire que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx = 1$.

— Calculez les moments d'ordre 1 et 2 de X.

Calculons l'intégrale demandée :

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx &= \int_0^a Cxdx + \int_a^2 C(2a-x)dx = C\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a + C\left[2ax - \frac{x^2}{2}\right]_a^{2a} \\ &= C\left[\frac{a^2}{2} - \frac{0^2}{2} + \left(4a^2 - \frac{(2a)^2}{2}\right) - \left(2a^2 - \frac{a^2}{2}\right)\right] = Ca^2\end{aligned}$$

Il faut donc choisir $C = 1/a^2$. On peut aussi tracer la fonction, remarquer que l'aire sous la courbe correspond à celle deux triangles rectangles de petit côté a et de grand côté Ca puis faire un raisonnement géométrique pour conclure (ou se convaincre du résultat de la première intégrale.



Le moment d'ordre 1 de X est donné par

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} xf_a(x)dx &= \int_0^a Cx^2dx + \int_a^2 Cx(2a-x)dx = C\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a + C\left[ax^2 - \frac{x^3}{3}\right]_a^{2a} \\ &= \frac{1}{a^2}\left[\frac{a^3}{3} - \frac{0^3}{3} + \left(4a^3 - \frac{(2a)^3}{3}\right) - \left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right)\right] = a\end{aligned}$$

De même, le moment d'ordre 2 est donné par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_a(x)dx = \int_0^a Cx^3dx + \int_a^2 Cx^2(2a-x)dx = C\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a + C\left[\frac{2ax^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_a^{2a}$$
$$= \frac{1}{a^2}\left[\frac{a^4}{4} - \frac{0^4}{4} + \left(\frac{2a\times(2a)^3}{3} - \frac{(2a)^4}{4}\right) - \left(\frac{2a^4}{3} - \frac{a^4}{4}\right)\right] = \frac{7a^2}{6}$$

Exercice 3 : Intégration et probabilités (II), 3 points

Soit $a > 0$. On considère la fonction f_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = Ce^{-a|x|}$$

Une variable aléatoire X est dite de laplace de paramètre $a > 0$ si sa densité est f_a.

- Calculez C pour que $f_a(x)$ soit bien une densité de probabilité.
- Calculez les moments d'ordre 1 et 2 de X_a.

Comme pour l'exercice précédent, on calcule l'intégrale demandée. On peut faire le calcul comme dans l'exercice précédent mais on va exploiter la parité de f_a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx = 2\int_0^\infty f_a(x)dx = 2C\int_0^\infty e^{-a|x|}dx = 2C\int_0^\infty e^{-ax}dx = 2C\left[\frac{-e^{-ax}}{a}\right]_0^{+\infty} = \frac{2C}{a}$$

Il faut donc choisir $C = \frac{a}{2}$ pour avoir $\int_{-\infty}^{+\infty} f_a(x)dx = 1$. Le moment d'ordre 1 de X est donné par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf_a(x)dx$$

Comme la fonction $x \mapsto xf_a(x)$ est impaire, son intégrale sur un intervalle symmétrique comme $\mathbb{R}$ est nulle. On a donc $\mathbb{E}[X] = 0$. Pour calculer $\mathbb{E}[X^2]$, on utilise la parité de $x^2 \mapsto x^2 f_a(x)$ pour se ramener à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_a(x)dx = 2\int_0^\infty x^2 f_a(x)dx = a\int_0^\infty x^2 e^{-a|x|}dx = a\int_0^\infty x^2 e^{-ax}dx$$

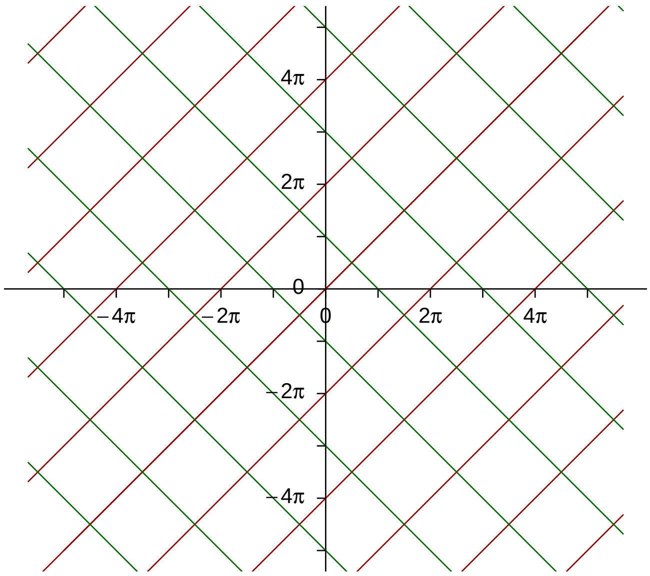
On calcule l'intégrale à l'aide de deux IPP successives. Pour la première, on pose $f'(x) = e^{-ax}$ (et donc $f(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax}$) et $g(x) = x^2$ (et donc $g'(x) = 2x$) :

$$\int_0^\infty \underbrace{x^2}_{=g(x)}\underbrace{e^{-ax}}_{=f'(x)}dx = [g(x)f(x)]_0^{+\infty} - \int_0^\infty g'(x)f(x)dx$$
$$= \underbrace{\left[\frac{-x^2e^{-ax}}{a}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^\infty \frac{2x}{a}e^{-ax}dx$$

Pour la seconde, on pose $f'(x) = e^{-ax}$ (et donc $f(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax}$) et $g(x) = \frac{2x}{a}$ (et donc $g'(x) = \frac{2}{a}$) :

$$\int_0^\infty \underbrace{\frac{2x}{a}}_{=g(x)}\underbrace{e^{-ax}}_{=f'(x)}dx = [g(x)f(x)]_0^{+\infty} - \int_0^\infty g'(x)f(x)dx$$
$$= \underbrace{\left[\frac{-2xe^{-ax}}{a^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \int_0^\infty \frac{2}{a^2}e^{-ax}dx$$
$$= \left[\frac{-2e^{-ax}}{a^3}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{a^3}$$

Ensemble C



h

Au final, $\mathbb{E}[X^2] = 2a\int_0^\infty x^2 e^{-ax} dx = \frac{4}{a^2}$

Exercice 4 : Dérivées partielles, 3 points

On considère la fonction f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f : (x, y) \mapsto x\cos(y) - y\cos(x)$$

Trouver l'ensemble $\mathcal{C}$ des points (x, y) tels que $\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$. Puis représenter $\mathcal{C}$ dans le plan $\mathbb{R}^2$.

D'après le théorème de Schwarz, l'ordre de dérivation est indifférent. On commence par calculer la dérivée première par rapport à x :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(y) + y\sin(x)$$

avant de dériver cette dernière par rapport à y

$$\frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}(x, y) = -\sin(y) + \sin(x)$$

Pour obtenir au final

$$\frac{\partial f^2}{\partial x \partial y}(x, y) = \sin(x) - \sin(y)$$

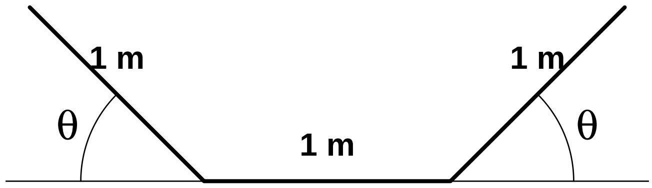
Trouver $\mathcal{C}$ revient à résoudre l'équation $\sin(y) = \sin(x)$.

$$\sin(y) = \sin(x) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ y = \pi - x + 2k\pi (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

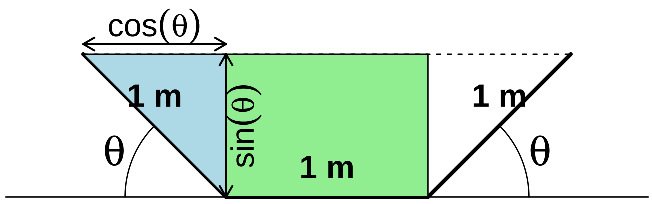
$\mathcal{C}$ est constitué de (i) la droite d'équation $y = x$ et de toutes ses translatées d'un multiple entier de 2π et (ii) la droite d'équation $y = \pi - x$ et de toutes ses translatées d'un multiple entier de 2π. Visuellement, les droites parallèles à $y = x$ sont en rouge sombre et celles parallèles à $y = \pi - x$ en vert sombre.

Problème 1 : Géométrie et optimisation, 5 points

On considère une tôle de métal rectangulaire de $l = 3$ mètres de large et $L = 5$ mètres de long. On plie la tôle de métal dans sa largeur comme suit (vue de coupe) pour former une bassine de L mètres de long :



Les faces avant et arrières sont fermées, indépendamment de l'angle θ choisi. Quelle est la valeur de θ qui maximise le volume de la bassine ? Quel est le volume correspondant ?
La difficulté du problème consiste à formaliser le problème en terme mathématiques. Notons $V(\theta)$ le volume de la bassine et $S(\theta)$ la surface interne de la coupe représentée plus haut. Rajoutons quelques mesures de longueurs et de surface au dessin :



Les indications de longeurs sur le dessin montrent que la surface $S(\theta)$ est donnée par 2 fois la surface bleue et une fois la surface verte. On a donc :

$$S(\theta) = 2 \times \frac{\cos(\theta) \times \sin(\theta)}{2} + 1 \times \sin(\theta) = \sin(\theta)(1 + \cos(\theta))$$

Comme il s'agit d'une coupe de la bassine, on en déduit immédiatement que $V(\theta) = 5S(\theta)$. Il faut donc maximiser $V(\theta)$, ou de manière équivalente $S(\theta)$, en θ. Les valeurs admissibles pour θ sont $[0, 2\pi/3]$ (au délà de $2\pi/3$, on ne peut plus rabattre les ailettes). On cherche donc à maximimer $S(\theta)$ sur $I = [0, 2\pi/3]$. Calculons la dérivée de S par rapport à θ

$$S'(\theta) = \cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1$$

Cherchons les points d'annulation de $S'(\theta)$ sur I. On se ramène à une équation de degré 2 en posant $X = \cos(\theta)$:

$$S'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2X^2 + X - 1 = 0 \\ X = \cos(\theta) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} X = 1/2 \\ X = -1 \\ X = \cos(\theta) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \theta = \pi + 2k\pi \end{cases}$$

Le seul point d'annulation de S' dans I est donc $\theta = \pi/3$. Les points critiques du problème sont donc $\theta = 0$ et $\theta = 2\pi/3$ (bornes du domaine) et $\theta = \pi/3$ (point d'annulation de la dérivée). Il ne reste qu'à évaluer S en ces trois points pour trouver le maximum sur I.

$$S(0) = 0 \qquad S(2\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{4} \qquad S(\pi/3) = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Le volume maximum de la bassine est donc $V_{\max} = V(\pi/3) = \frac{15\sqrt{3}}{4}$ m^3 qui est atteint pour $\theta = \pi/3$.