Opérations sur les limites

Mahendra Mariadassou

14 octobre 2019

Introduction

Objectifs

- Savoir étudier les variations d'une fonctions
- Résoudre problèmes d'optimisation
- Savoir trier des ordres de grandeur
- Approfondir la notion de limite

Domaine d'étude d'une fonction: parité

En général une fonction f est donnée par son expression $f(x)$. Pour se ramener à une application il faut détérminer le domaine de définition D_f de f, c'est à dire l'ensemble des x pour lesquels l'expression $f(x)$ a du sens.

une fonction f est dite paire (resp. impaire) lorsque

- D_f est stable par passage à l'opposé, c'est à dire que si $x \in D_f$, alors $-x \in D_f$.
- $\forall x \in D_f f(-x) = f(x)$ (resp. $\forall x \in D_f f(-x) = -f(x)$)

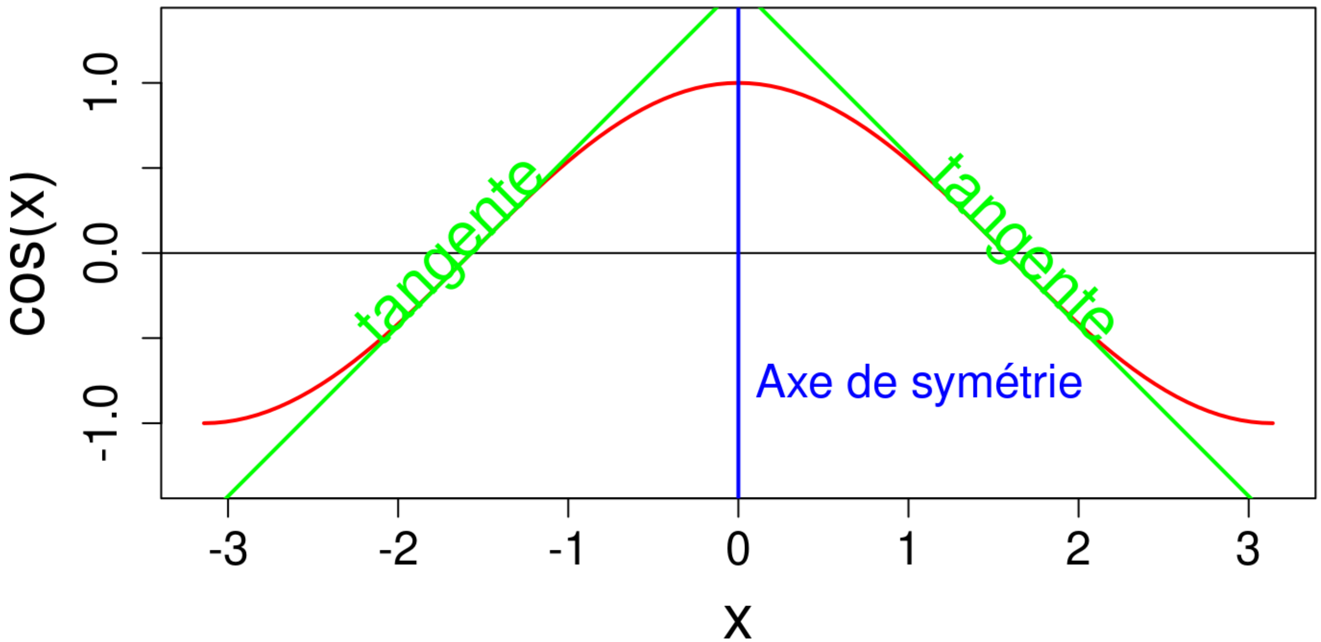
Exemples

- $\cos(x)$ est paire, $\sin(x)$ est impaire.

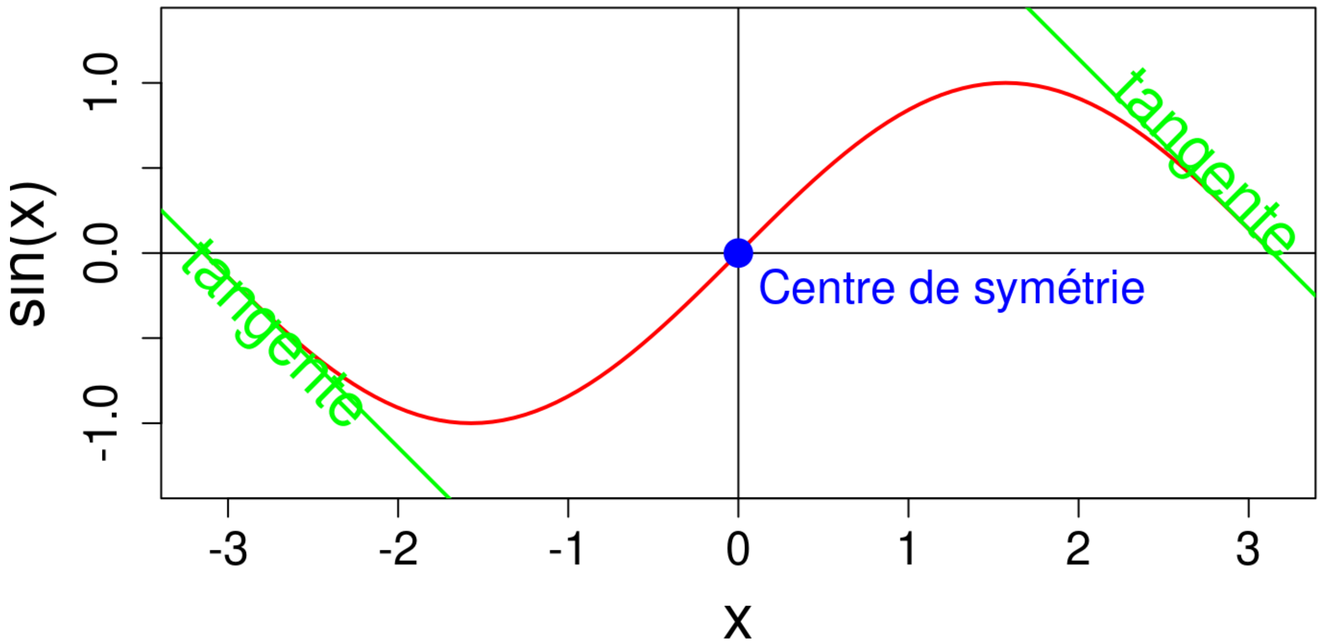
Domaine d'étude d'une fonction: parité

- Si f est paire, le graphe C_f de f est symétrique par rapport à l'axe (Oy). Si f est dérivable, sa dérivée est impaire.
- Si f est impaire, le graphe C_f de f est symétrique par rapport au point $(0, 0)$. De plus, si $0 \in D_f$, alors $f(0) = 0$. Si f est dérivable, sa dérivée est paire.

Fonction paire



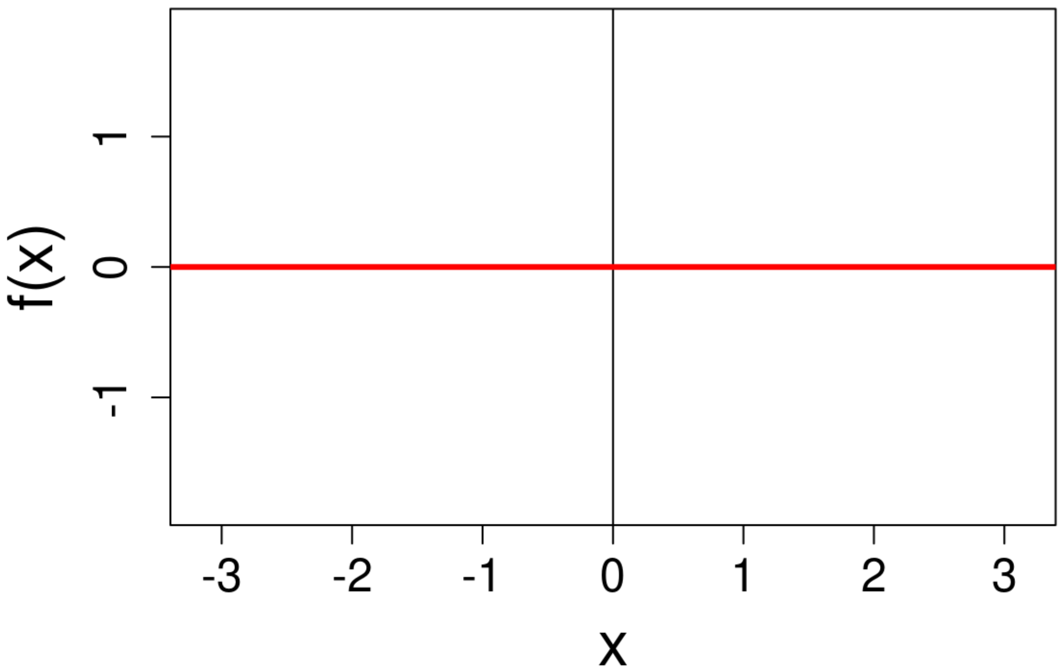
Fonction impaire



Fonction nulle

Une fonction est dite *identiquement nulle sur un ensemble* I lorsque

$$\forall x \in I, f(x) = 0$$



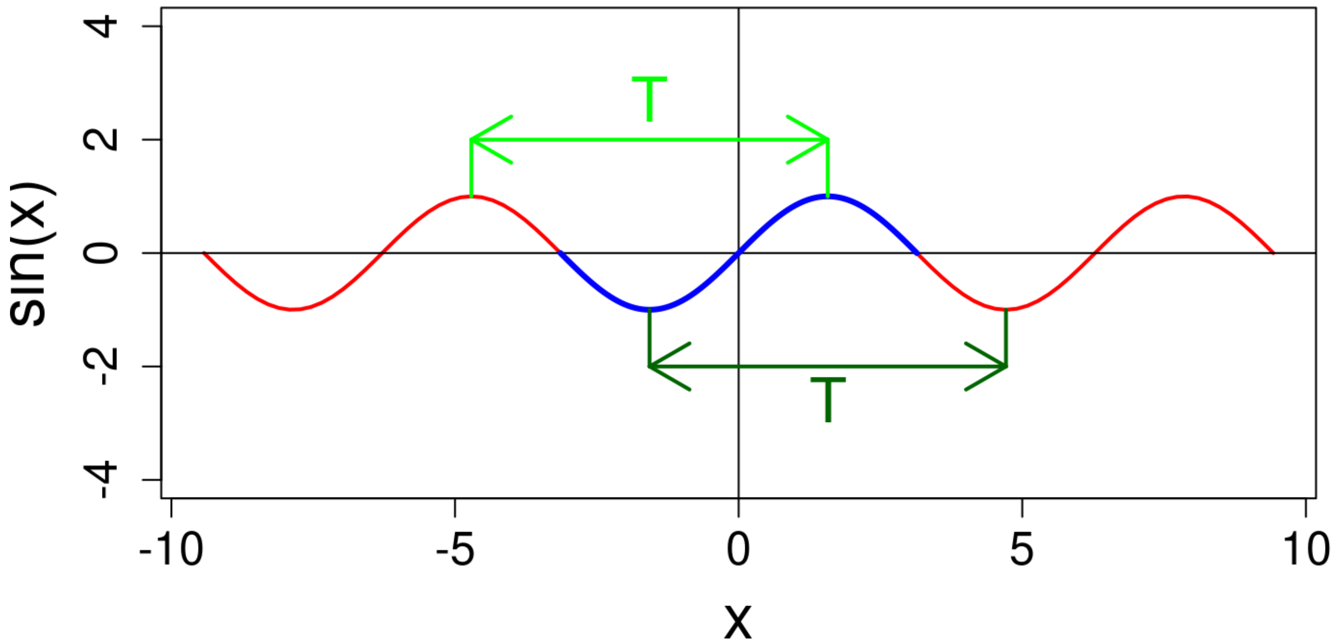
Périodicité

une fonction f est dite périodique de période $T > 0$ lorsque

- D_f est stable par translation, c'est à dire que si $x \in D_f$, alors $x + T \in D_f$.
- $\forall x \in D_f f(x+T) = f(x)$

En général, on utilise la périodicité pour n'étudier f que sur une période et la parité pour ne l'étudier que sur une moitité du domaine de définition (par exemple $D_f \cap \mathbb{R}_+$).

Fonction périodique



Exercices

Donner le domaine de définition et les éventuelles (im)parité/périodicité des fonctions suivantes:

- $f(x) = e^x + e^{-x}$
- $f(x) = e^x - e^{-x}$
- $f(x) = x + \ln(x)$
- $f(x) = e^x \frac{x+1}{x-1}$
- $f(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$
- $f(x) = \ln(\cos(x))$
- $f(x) = \ln|\cos(x)|$
- $f(x) = e^{\tan(x)} - \tan(x)$

Limite: Définition formelle (Optionnel)

$\bar{\mathbb{R}}$ et la notion de voisinage

Dans la suite, $a \in \bar{\mathbb{R}}$ signifie que a est un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$.

En analyse, beaucoup de notions sont **locales**: il suffit de connaître f "autour" de a pour savoir si elle est continue/dérivable/de classe $\mathcal{C}^k$ en a. Pour formaliser cette notion de proximité, on va définir la notion de "voisinage de a".

Soit $P(x)$ un propriété portant sur $x \in \mathbb{R}$, (par exemple $P(x)$ = "$x > 10$") et $a \in \bar{\mathbb{R}}$.

Voisinage d’un point

- $P(x)$ est vraie au voisinage de $+\infty$ si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in [A, +\infty[$. Autrement dit, $P(x)$ est vraie pour x suffisamment grand.
- $P(x)$ est vraie au voisinage de $-\infty$ si il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in]-\infty, A]$. Autrement dit, $P(x)$ est vraie pour x suffisamment petit.
- $P(x)$ est vraie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ si il existe $\delta > 0$ tel que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in]a-\delta, a+\delta[$. Autrement dit, $P(x)$ est vraie pour x suffisamment proche de a.

Voisinage à gauche, à droite

- $P(x)$ est vraie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ **à droite** si il existe $\delta > 0$ tel que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in]a, a + \delta[$. Autrement dit, $P(x)$ est vraie pour x suffisamment proche de a tout étant strictement supérieur à a.

- $P(x)$ est vraie au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ **à gauche** si il existe $\delta > 0$ tel que $P(x)$ est vraie pour tout $x \in]a - \delta, a[$. Autrement dit, $P(x)$ est vraie pour x suffisamment proche de a tout étant strictement inférieur à a.

Remarques

Les notions de voisinage à droite de $+\infty$ et à gauche de $-\infty$ n'ont pas de sens (pourquoi?). La notion de voisinage permet de mettre en évidence le caractère local d'une propriété.

Voisinage illustration

Exercices

Écrire avec des quantificateurs que

- f est définie au voisinage de 2
- g est positive au voisinage de $+\infty$
- h est proche de 3 à 10^{-6} près au voisinage de 4

Limite infinie à l'infini

Soit $f : A \to B$ une fonction numérique. On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Limite infinie en $\pm\infty$

On dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$, noté $\lim_{+\infty} f = +\infty$, si pour tout réel M (arbitrairement grand), $f(x)$ est plus grand que M pour x assez grand (proche de ∞).

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in D_f, x \in]A, +\infty[\Rightarrow f(x) > M$$

On dit que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$, noté $\lim_{+\infty} f = -\infty$, si pour tout réel M (arbitrairement petit), $f(x)$ est plus petit que M pour x assez grand (proche de ∞)

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in D_f, x \in]A, +\infty[\Rightarrow f(x) < M$$

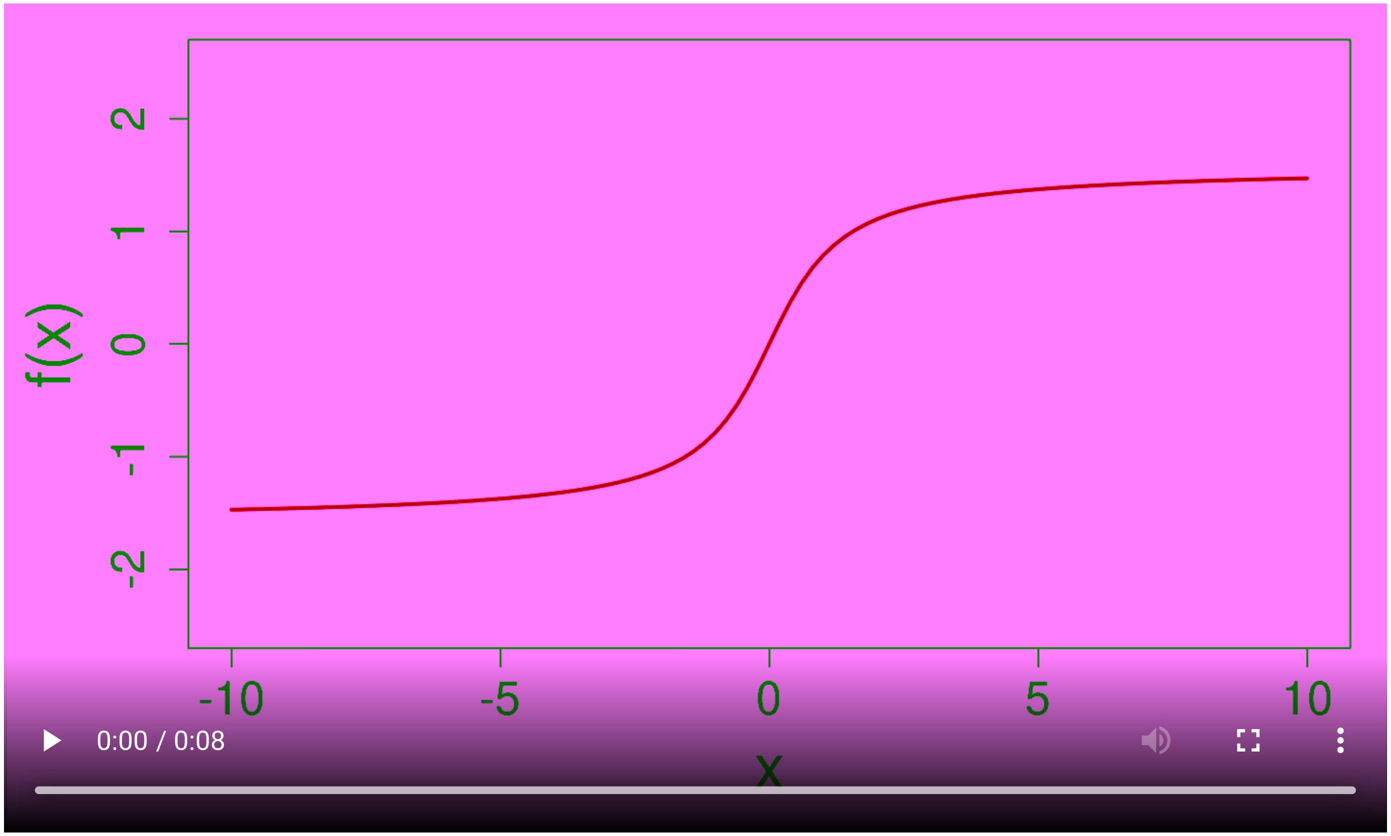
Limite finie à l'infini.

Soit $l \in \mathbb{R}$.

On dit que f tend vers l en $+\infty$, noté $\lim_{+\infty} f = l$, si pour tout réel $\varepsilon > 0$ (arbitrairement proche de 0), $f(x)$ est proche de l à moins de ε pour x assez grand (proche de ∞).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x \in D_f, x \in]A, +\infty[\Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Exemple



Exercices

Écrire la définition formelle (avec des quantificateurs) de

- $\lim_{-\infty} f = +\infty$
- $\lim_{-\infty} f = -\infty$
- $\lim_{-\infty} f = l$

Limite infinie en un point

Soit f une fonction et D_f son domaine de définition. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que

- $a \in D_f$ (f est alors définie en a)
- a est une borne de a (f est définie sur un voisinage de a mais pas en a)

Pour la limite infinie, $a \notin D_f$. On dit que f tend vers $+\infty$ en a, noté $\lim_a f = +\infty$, si pour tout réel M (arbitrairement grand), $f(x)$ est plus grand que M pour x assez proche de a).

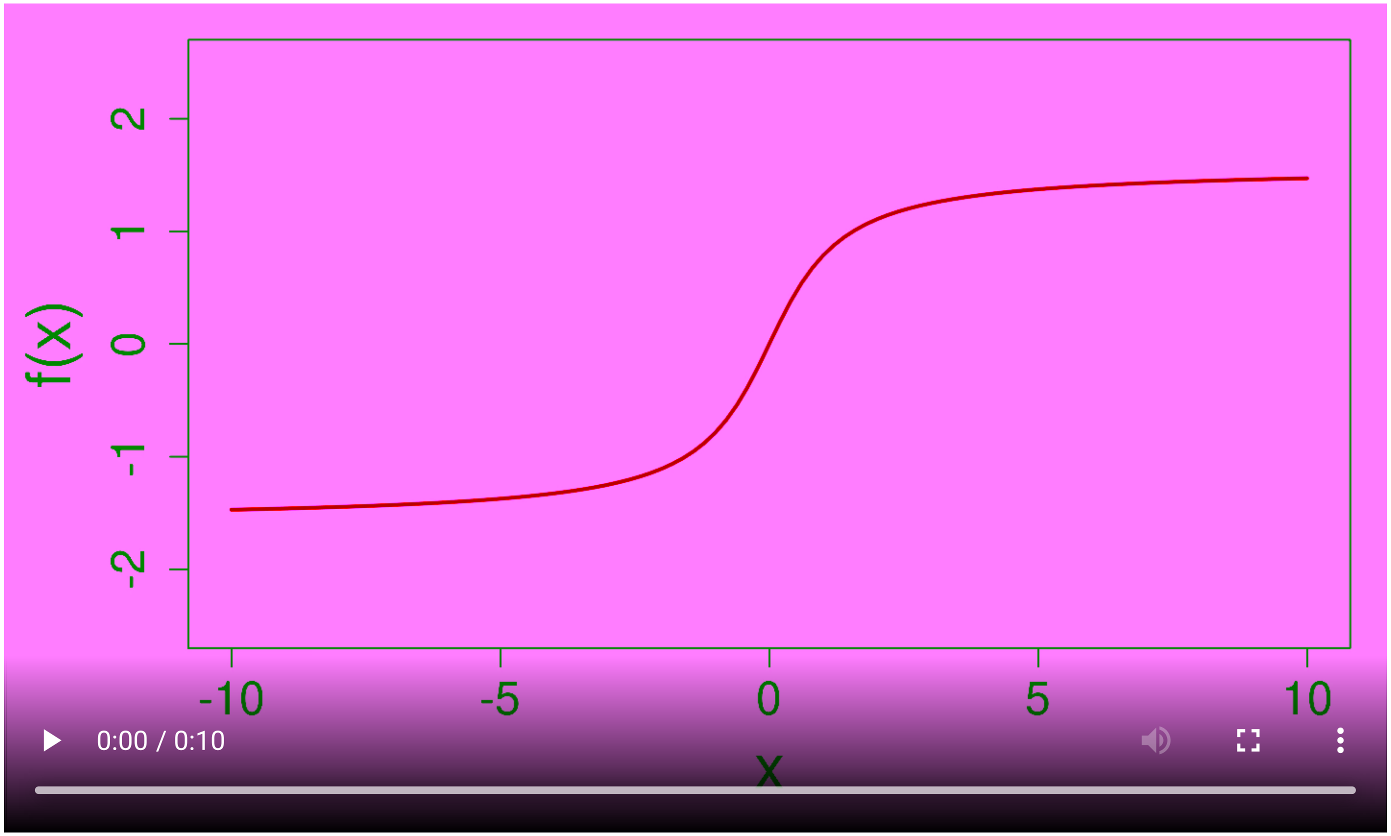
$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0 \textbf{ tel que } \forall x \in D_f, |x-a| \leq \delta \Rightarrow f(x) > M$$

Limite finie en un point

On dit que f tend vers l en a, noté $\lim_a f = l$, si pour tout réel $\varepsilon > 0$ (arbitrairement proche de 0), $f(x)$ est proche de l (à ε près) pour x assez proche de a).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f, |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

Exemple



Limite à gauche/à droite en un point

Soit f définie au voisinage à gauche de a. On dit que f tend vers l à gauche en a, noté $\lim_{a^-} f = l$, si pour tout réel $\varepsilon > 0$ (arbitrairement proche de 0), $f(x)$ est proche de l (à ε près) pour x assez proche de a par valeurs inférieures).

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in D_f, x \in]a - \delta, a[\Rightarrow |f(x) - l| \leq \varepsilon$$

On a une définition similaire pour $\lim_{a^+} f$, la limite à droite en a (voir exercices).

Exercices

Écrire la définition formelle (avec des quantificateurs) de

- $\lim_a f = -\infty$
- $\lim_{a^-} f = +\infty$
- $\lim_{a^+} f = +\infty$
- $\lim_{a^+} f = l$

Propriétés des limites

Unicité de la limite

Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$. Si f admet une limite en a (resp. une limite à gauche ou une limite à droite), alors cette limite est unique.

Soit $a \in \mathbb{R}$. Si f admet une limite en a et est définie en a, alors cette limite est forcément $f(a)$.

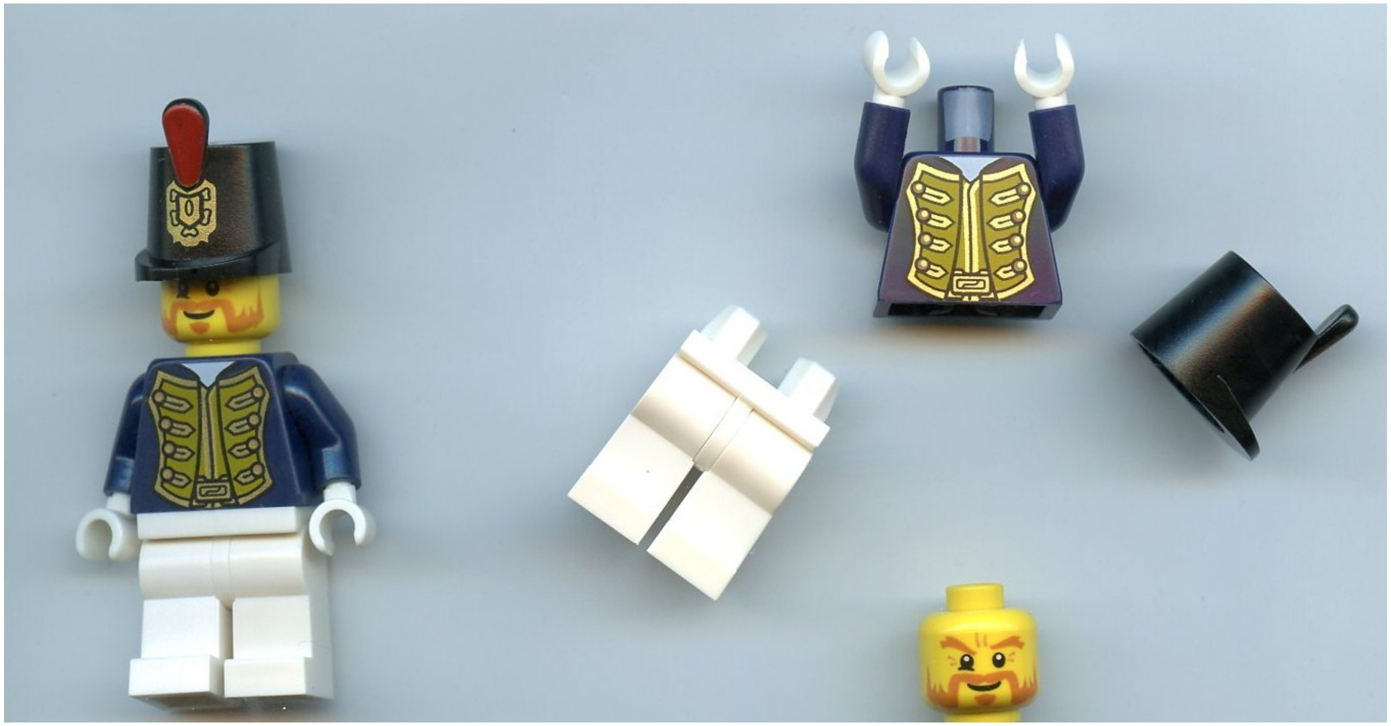
Soit $a \in \mathbb{R}$ et f définie au voisinage de a (sauf peut-être en a).

- Si f n'est pas définie en a, f admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à gauche et une limite à droite en a et que ces limites sont égales.
- Si f est définie en a, f admet une limite en a si et seulement si elle admet une limite à gauche et une limite à droite en a et que ces limites sont égales à $f(a)$.

Opération sur les limites

Théorèmes d’opérations

En pratique, on revient rarement à la définition formelle de la limite. On se sert plutôt des “théorèmes d’opérations”" qui permettent de calculer des limites complexes en combinant des limites élémentaires.



Somme de limite

Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g telles que $\lim_a f = l$ et $\lim_a g = m$, alors la limite éventuelle de $f + g$ en a est donnée par

	$l = -\infty$	$l \in \mathbb{R}$	$l = +\infty$
$m = -\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Ind
$m \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$l + m$	$+\infty$
$m = +\infty$	Ind	$+\infty$	$+\infty$

Où Ind indique une forme indéterminée (ici $\infty - \infty$)

Produit de limite

Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et deux fonctions f et g telles que $\lim_a f = l$ et $\lim_a g = m$, alors la limite éventuelle de $f \times g$ en a est donnée par

	$l = -\infty$	$l \in \mathbb{R}_-^\star$	$l = 0$	$l \in \mathbb{R}_+^\star$	$l = +\infty$
$m = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	Ind	$-\infty$	$-\infty$
$m \in \mathbb{R}_-^\star$	$+\infty$	ml	0	ml	$-\infty$
$m = 0$	Ind	0	0	0	Ind
$m \in \mathbb{R}_+^\star$	$-\infty$	ml	0	ml	$+\infty$
$m = +\infty$	$-\infty$	$-\infty$	Ind	$+\infty$	$+\infty$

Les formes indéterminées correspondent à $0 \times \infty$

Quotient de limite

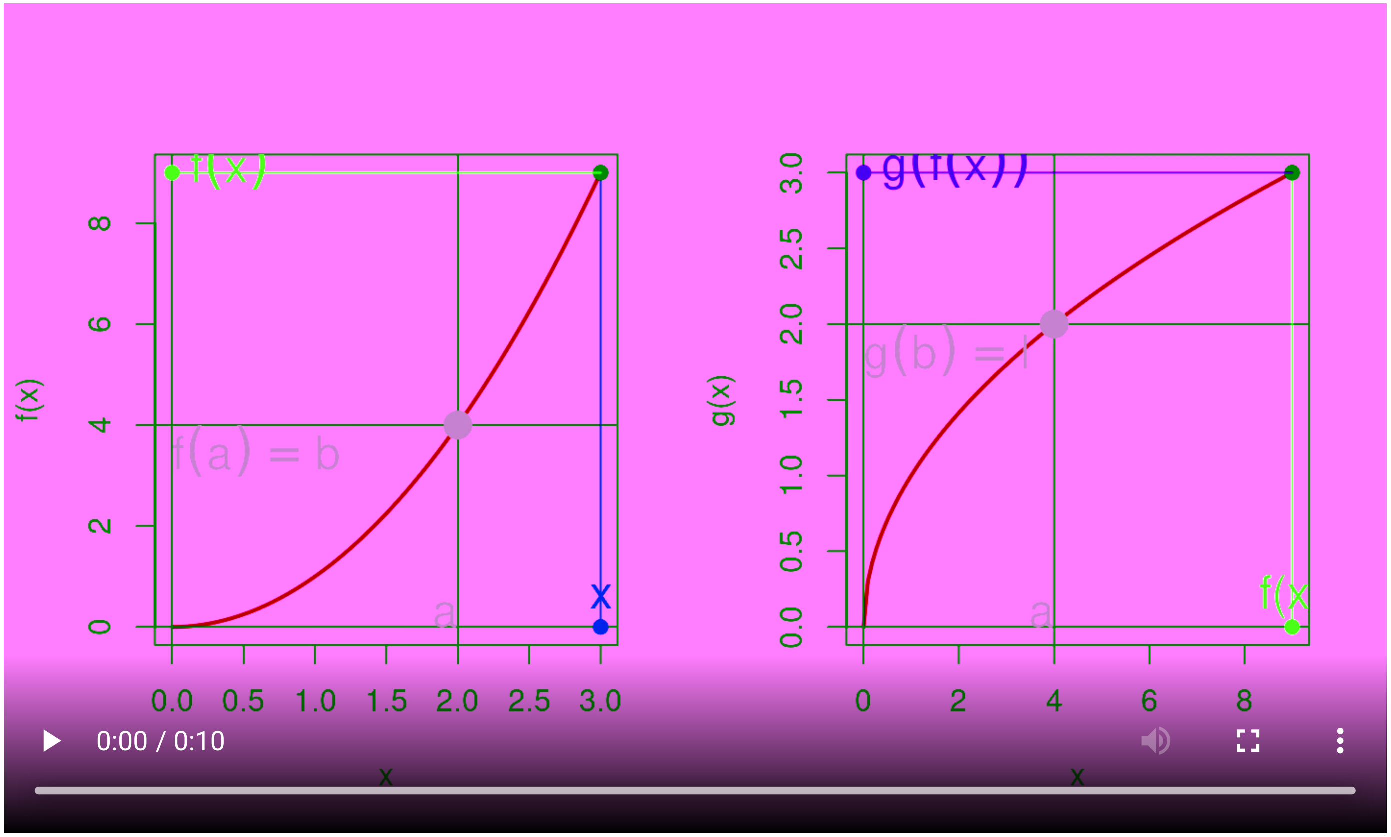
Soit $a \in \bar{\mathbb{R}}$ et f ne s'annulant pas au voisinage de a telle que $\lim_a f = l$.

- Si $l = \pm\infty$, alors $\lim_a \frac{1}{f} = 0$
- Si $l \in \mathbb{R}^\star$, alors $\lim_a \frac{1}{f} = \frac{1}{l}$
- Si $l = 0$, il y a plusieurs cas.
  - si $f > 0$ sur un voisinage de a, on a $\lim_a \frac{1}{f} = +\infty$
  - si $f < 0$ sur un voisinage de a, on a $\lim_a \frac{1}{f} = -\infty$
  - si f change de signe sur tous les voisinages de a, la limite est une forme indéterminée.

Pour la limite de f/g, on passe par le produit $f \times (1/g)$.

Composée de fonctions

Soit $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$. Soient f et g telles que $\lim_a f = b$ et $\lim_b g = l$ avec ($l \in \bar{\mathbb{R}}$). On alors $\lim_a (g \circ f) = l$.



Fonctions de la forme $u(x)^{v(x)}$

Dans le cas de fonctions de la forme $u(x)^{v(x)}$ on repasse **toujours** à la forme exponentielle $u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln(u(x))}$ et on procède en deux temps:

- on étudie la limite de $v(x)\ln(u(x))$
- on en déduit la limite recherchée par composition avec l'exponentielle. **Attention** La forme 1^∞ est **indéterminée**
- $\lim_0 \cos(x)^{1/x} = 1$
- $\lim_{0+} (1+\sin(x))^{1/x^2} = +\infty$

Théorème d'encadrement (des gendarmes)

Soit $a, l \in \mathbb{R}$ et f, g, h définies au voisinage de a (sauf peut-être en a).

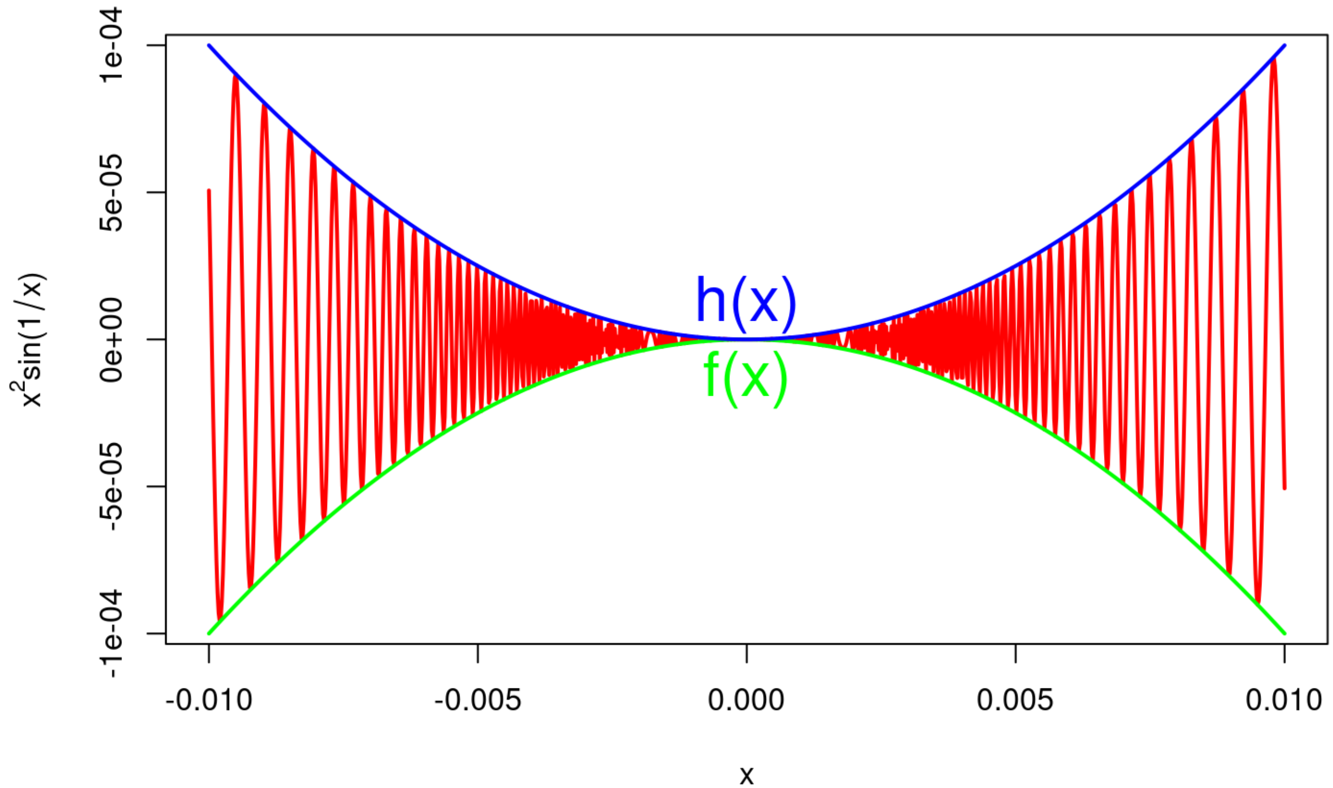
- Si pour tout x au voisinage de a, $f(x) \leq g(x)$ alors

$$\lim_a f = +\infty \Rightarrow \lim_a g = +\infty$$
$$\lim_a g = -\infty \Rightarrow \lim_a f = -\infty$$

- Si Si $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ au voisinage de a et $\lim_a f = \lim_a h = l$, alors $\lim_a g = l$.

Illustration

$g(x) = x^2 \sin(1/x)$ est compris entre $f(x) = -x^2$ et $h(x) = x^2$ au voisinage de 0 (en fait sur tout $\mathbb{R}$) et $\lim_0 -x^2 = \lim_0 x^2 = 0$ donc $\lim_0 x^2 \sin(1/x) = 0$



Limites classiques (à savoir)

Voir la feuille sur les fonctions usuelles ainsi que les limites suivantes en 0

- $\lim_0 \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim_0 \frac{\tan(x)}{x} = 1$
- $\lim_0 \frac{e^x - 1}{x} = 1$
- $\lim_0 \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\lim_0 \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$

Limites classiques: croissance comparée

Soit $f(x) = e^{ax} x^b \ln(x)^c$ avec $x > 0$ et $(a, b, c) \in \mathbb{R}$. La limite en $+\infty$ de f est déterminée par a, puis par b puis par c comme suit:

- Si $a > 0$ $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$
- Si $a < 0$ $\lim_{+\infty} f(x) = 0$
- Si $a = 0$:
  - Si $b > 0$ $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$
  - Si $b < 0$ $\lim_{+\infty} f(x) = 0$
  - Si $b = 0$:
    - Si $c > 0$ $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$
    - Si $c < 0$ $\lim_{+\infty} f(x) = 0$

Exercices

Calculer les limites suivantes

$$\lim_{+\infty} x^4 e^{-\sqrt{x}} \qquad \lim_{-\infty} e^{3x^2}/x^5 \qquad \lim_{+\infty} x\ln(1+1/x)$$

$$\lim_{0+} \frac{\ln(1+4x)}{x} \qquad \lim_{0+} \frac{\ln(1+x^2)}{x\sqrt{x}} \qquad \lim_{0+} \frac{x}{e^{x^2}-1}$$

$$\lim_{0+} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{e^x-1} \qquad \lim_{0+} \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x} \qquad \lim_{0+} \frac{x}{2}\left\lfloor \frac{3}{x} \right\rfloor$$

$$\lim_{1} \frac{x^n-1}{x^p-1} \qquad \lim_{0} \frac{\cos(x)-\sqrt{\cos(2x)}}{\sin^2(x)} \qquad \lim_{+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

$$\lim_{0+} \frac{\ln(x)}{x} \qquad \lim_{+\infty} x^3\ln(1+1/x\sqrt{x}) \qquad \lim_{+\infty} \sqrt{x^2+x+1}-x$$