

# Développements Limités

Mahendra Mariadassou

4 novembre 2019

# Introduction

# Plan du cours

- Domaine d'étude
- Limites, continuité, dérivabilité et variations
- Comparaison locale de fonction
- Etude locale des fonctions
- Retour sur la limite

# Développement Limités

Le but des développements limités est de faire des **approximations** en **négligeant** certaines quantités. On va voir ici qu'on néglige toujours une quantité **par rapport** à une autre.

On va formaliser cette intuition avec la notion de **négligeabilité** et les notations de Landau.

**Négligeabilité**

# Définition

On dit que  $f$  est **négligeable** devant  $g$  au voisinage de  $a \in \bar{\mathbb{R}}$  s'il existe une fonction  $\varepsilon$  définie au voisinage de  $a$  telle que  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow a$  et

$$\forall x \in D_f \cap D_g \quad f(x) = g(x)\varepsilon(x)$$

Dans la plupart des cas,  $g$  est non nulle au voisinage de  $0$  et la condition précédente peut se reformuler:  $f$  est négligeable devant  $g$  au voisinage de  $a$  si et seulement si  $\frac{f}{g} \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow a$ .

# Notation de Landau

Si  $f$  est négligeable devant  $g$  en  $a$ , on note

- $f = o_a(g)$  en omettant  $a$  si le voisinage est clair. On dit qu'au voisinage de  $a$ ,  $f$  est un  $o(g)$  (prononcé "petit o de g")
- Par un abus de notation, on utilise la même notation pour des expressions:  $x^2 = o(x)$  au voisinage de 0.
- On écrit enfin  $f = g + o(h)$  pour dire  $f - g = o(h)$ .

Les cas particuliers suivants sont à **connaître**

- Si  $a \in \mathbb{R}$  et  $n < m$  alors  $(x - a)^n = o_{\pm\infty}((x - a)^m)$  et  $(x - a)^m = o_a((x - a)^n)$
- Si  $\lim_a g = \pm\infty$  et  $f$  est bornée au voisinage de  $a$  (par exemple  $\lim_a f$  finie), alors  $f = o(g)$
- Si  $f = o_a(1)$ , alors  $\lim_a f = 0$ .

# Propriétés des $o$

- Si  $f = o(g)$  et  $g = o(h)$ , alors  $f = o(h)$
- Si  $f_1 = o(g)$  et  $f_2 = o(g)$ , alors  $f_1 + f_2 = o(g)$
- Si  $f = o(g)$ , alors  $f \times h = o(g \times h)$
- Si  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ , alors  $f = o(g) \Leftrightarrow f = o(\lambda g)$
- Si  $f = o_a(1)$ , alors  $\lim_a f = 0$ .
- Si  $f_1 = o(g_1)$  et  $f_2 = o(g_2)$ , alors  $f_1 \times f_2 = o(g_1 \times g_2)$

# Exercices

Montrer que

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad x^\alpha = o_{+\infty}(e^x)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad e^x = o_{-\infty}(|x|^{-\alpha})$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad \ln(x) = o_{+\infty}(x^\alpha)$
- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+ \quad x^{-\alpha} = o_{+\infty}(\ln(x))$

# Approximation et somme

Une bonne règle heuristique à retenir pour s'assurer que le résultat approché est peu différent du résultat exact dans une somme est la suivante:

- Pour faire une approximation, on néglige un terme devant les autres à **l'intérieur d'une somme**

# Exemple (I)

Considérons la distance  $l' = \frac{lf}{l+f}$  qui apparaît régulièrement en optique. On souhaite connaître la distance  $l'$  quand la distance  $l$  est grande devant la focale  $f$  ( $l \gg f$ ).

- Si on néglige  $f$  naivement en le posant égal à 0, on obtient  $l' = 0$  qui est absurde
- En revanche, si on néglige  $f$  devant  $l$  dans la somme  $f + l$ , on commet une faible erreur puisque  $l + f \simeq l$
- On peut donc poursuivre le calcul avec l'approximation  $l' \simeq \frac{lf}{l+f} \simeq f$ .

## Exemple (II)

De la même façon, si  $f(x)$  fait intervenir des sommes, on peut utiliser les mêmes arguments pour savoir comment  $x$  se comporte pour des grandes et des petites valeurs de  $x$ . Par exemple pour  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ :

- si  $x \gg 1$ , alors  $x^2 + 1 \simeq x^2$  et  $f(x) \simeq \frac{x}{x^2} = 1/x$
- si  $x \ll 1$ , alors  $x^2 + 1 \simeq 1$  et  $f(x) \simeq x$

Faire une approximation est **plus précis** que calculer une limite: En effet dire  $f(x) \simeq x$  (quand  $x \rightarrow 0$ ) est plus précis que d'écrire  $f$  tend vers 0 en 0. La limite se déduit de l'approximation mais pas l'inverse.

# Exemple (III)

En notations de Landau, on a

- $f(x) = x(1 + o(1)) = x + o(x)$  au voisinage de 0
- $f(x) = \frac{1}{x}(1 + o(1)) = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$  au voisinage de  $+\infty$

C'est très utile mais on peut avoir d'aller plus loin et de connaître le comportement de  $f(x) - x$  au voisinage de 0. On sait juste  $f(x) - x = o(x)$  mais on ne connaît pas son ordre de grandeur:  $x^2$ ?  $x^3$ ? Autre chose?

De même si on ne manipule pas directement des sommes mais des fonctions différentes (par exemple  $\cos(x)$ ,  $\sin(x)$ ), peut-on faire le même genre d'approximation?

C'est justement l'intérêt des développements limités.

# Exercice

Donner des approximations des quantités suivantes:

$\frac{1}{1+A}$	$A \ll 1$	$A \gg 1$
$\frac{3+B+2B^2}{2+3B+B^2}$	$B \ll 1$	$B \gg 1$
$\frac{a+b}{ab}$	$a \ll b$	$a \gg b$
$\frac{x^2+y^2+2xy}{3x-y}$	$x \ll y$	$x \gg y$
$\sqrt{u^2+v^2}$	$u \ll v$	$u \gg v$
$e^{\sqrt{w}-1}$	$w \ll 1$	$w \gg 1$

# Correction

$$\text{Quand } A \ll 1, \frac{1}{1+A} \simeq 1$$

$$\text{Quand } B \ll 1, \frac{3+B+2B^2}{2+3B+B^2} \simeq \frac{3}{2}$$

$$\text{Quand } a \ll b, \frac{a+b}{ab} \simeq \frac{1}{a}$$

$$\text{Quand } x \ll y, \frac{x^2+y^2+2xy}{3x-y} \simeq -y$$

$$\text{Quand } u \ll v, \sqrt{u^2+v^2} \simeq |v|$$

$$\text{Quand } w \ll 1, e^{\sqrt{w}-1} \simeq \frac{1}{e}$$

$$\text{quand } A \gg 1, \frac{1}{1+A} \simeq \frac{1}{A}$$

$$\text{quand } B \gg 1, \frac{3+B+2B^2}{2+3B+B^2} \simeq 2$$

$$\text{quand } a \gg b, \frac{a+b}{ab} \simeq \frac{1}{b}$$

$$\text{quand } x \gg y, \frac{x^2+y^2+2xy}{3x-y} \simeq \frac{x}{3}$$

$$\text{quand } u \gg v, \sqrt{u^2+v^2} \simeq |u|$$

$$\text{quand } w \gg 1, e^{\sqrt{w}-1} \simeq e^{\sqrt{w}-1}$$

## Correction (II)

La quantité  $e^{\sqrt{w}-1}$  est un cas particulier au sens où la somme est dans l'argument de l'exponentielle. On a donc

$$e^{\sqrt{w}-1} = \frac{1}{e} e^{\sqrt{w}}$$

Et il n'y a pas de somme et donc on ne peut en général négliger aucun terme. La formule se simplifie néanmoins quand  $w \ll 1$  parce qu'on a alors  $e^{\sqrt{w}} \simeq 1$ . Mais on n'a négligé aucun terme pour arriver à cette approximation.

**Développements Limités**

# Premier Contact

Soit  $n \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$  **sauf éventuellement en  $a$** . On dit que  $f$  admet un **développement limité** à l'ordre  $n$  en  $a$  (noté  $DL_n(a)$ ) s'il existe des réels  $(b_0, b_1, \dots, b_n)$  tels que

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = b_0 + b_1(x - a) + \dots + b_n(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Attention, on ne développe pas les  $(x - a)^k$  (puisqu'on regarde des termes correctifs quand on s'éloigne de  $a$ ).

De façon générale, en posant  $h = (x - a)$ , on se ramènera **toujours** à des DL en 0.

Le terme  $o((x - a)^n)$  est appelé *reste* ou *terme complémentaire*, le terme  $b_0 + \dots + b_n(x - a)^n$  est appelé terme polynômial.

# Formule de Taylor

Le théorème suivant permet de construire explicitement  $b_0, b_1, \dots, b_n$

Soit  $n \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  et  $f$  une fonction définie au voisinage de  $a$  **sauf éventuellement en  $a$** . Si  $f$  est  $n$  dérivable en  $a$ , alors elle admet le  $DL_n(a)$  suivant

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

Autrement si  $f$  est  $n$  fois dérivable, on sait choisir  $b_0, \dots, b_n$  sans (trop d') efforts

# Intuition

Dans le développement de Taylor, les termes sont triés du plus important au moins important. En effet, au voisinage de  $a$

$$1 \gg (x - a) \gg (x - a)^2 \gg \dots \gg (x - a)^n \gg o((x - a)^n)$$

Le DL permet donc d'obtenir des approximations successives, dites d'ordre  $0, 1, \dots, n$  de  $f$  (au voisinage de  $a$ ) en ne gardant que les termes les plus à gauche:

Ordre 0  $f(x) \simeq f(a)$

Ordre 1  $f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a)$

Ordre 2  $f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2$

⋮

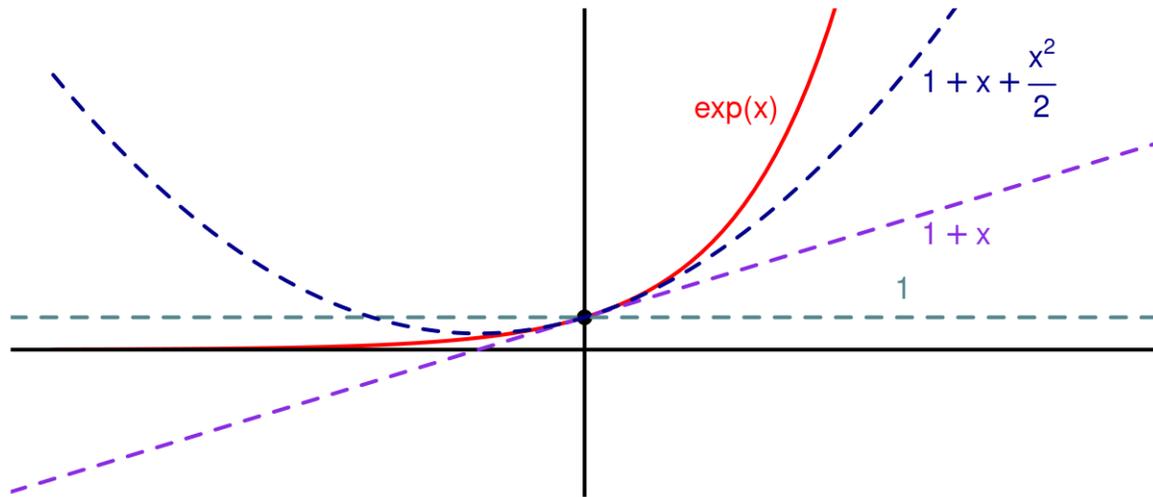
Ordre  $n$   $f(x) \simeq f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$

# Intuition (II)

Certaines des approximations précédentes sont bien connues:

- l'approximation d'ordre  $0$  est la limite
- l'approximation d'ordre  $1$  est la tangente
- Plus généralement, l'approximation d'ordre  $n$  est un polynôme de degré  $n$

# Intuition (III)



**Lien avec l'approximation**

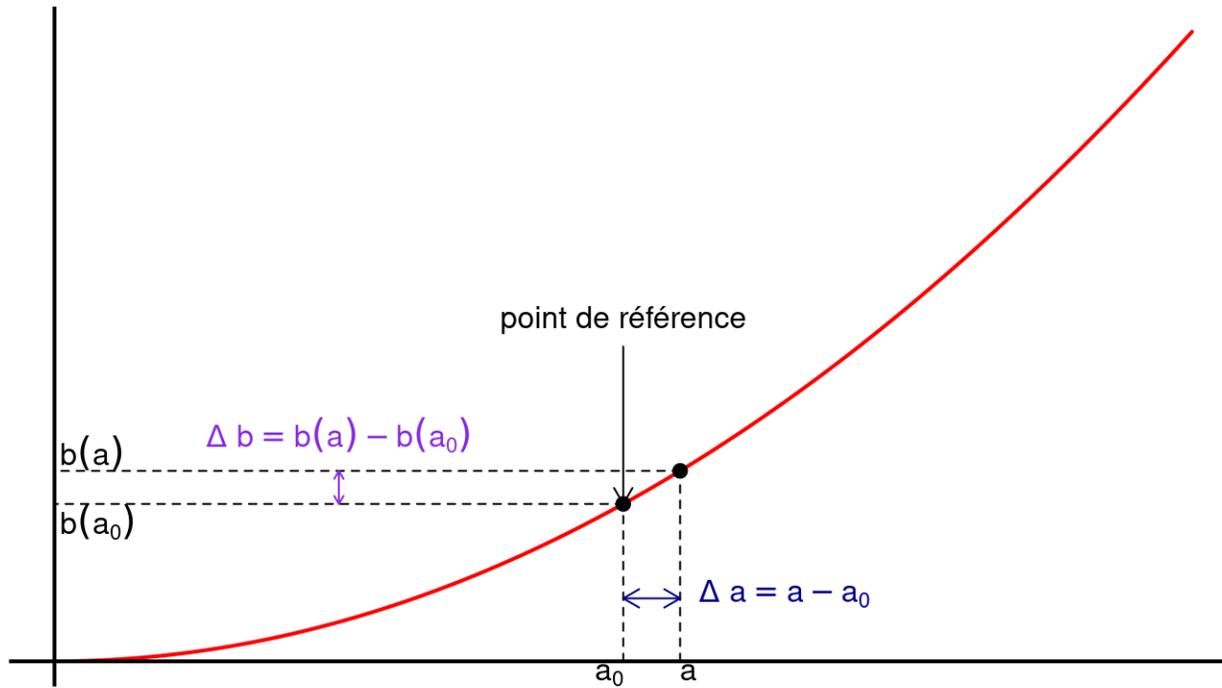
# DLs et différentielle

Quand on utilise les DLs dans des contextes concrets, l'absence de notations  $f$  et  $x$  peut entraîner des erreurs. On va donc revenir aux notions de différentielles pour l'explicitier.

On considère deux quantités  $a$  et  $b$  reliées entre elles par une certaine relation  $b$  et on cherche une approximation de  $b(a)$  au voisinage d'une valeur de référence  $a_0$ . Si  $b$  est continue, on sait que  $b(a)$  sera proche de  $b(a_0)$  mais on voudrait être plus précis.

On définit les petits écarts  $\Delta b = b(a) - b(a_0)$  et  $\Delta a = a - a_0$ . On sait que  $\Delta b \rightarrow 0$  quand  $\Delta a \rightarrow 0$  mais on cherche un lien plus précis entre  $\Delta b$  et  $\Delta a$ .

# Illustration graphique



# Lien avec la dérivée

On a vu avec les *différentielles* que pour des variations infinitésimales, on a

$$db = \alpha da \quad \text{avec } \alpha = \frac{db}{da}$$

Si on considère des variations **suffisamment petites**  $\Delta b$  et  $\Delta a$ , cette relation doit rester valable:

$$\Delta b \simeq \alpha \Delta a$$

# Lien avec les dérivées successives

Si on n'est pas satisfait de l'approximation précédente, on peut rajouter des termes correctifs proportionnels à  $\Delta a^2$ ,  $\Delta a^3$ , ...:

$$\Delta b \simeq \alpha \Delta a + \beta \Delta a^2 + \gamma \Delta a^3 + \dots$$

Compte tenu des définitions de  $\Delta b = b(a) - b(a_0)$  et  $\Delta a = a - a_0$ , cela revient à approcher la relation  $b(a)$  par un polynôme  $b^{DL}$  de  $a$  de degré  $n$  (le fameux DL)

$$b^{DL}(a) = b(a_0) + \alpha(a - a_0) + \beta(a - a_0)^2 + \gamma(a - a_0)^3 + \dots$$

# Lien avec les dérivées successives (II)

Pour s'assurer que l'approximation  $b^{DL}(a) \simeq b(a)$  est valide au voisinage de  $a_0$ , on impose à  $b^{DL}$  et  $b$  d'avoir la même valeur en  $a_0$ , mais également la même pente, la même concavité, etc.

En termes formels,

$$\forall k \leq n \quad \frac{d^k b^{DL}}{da^k}(a_0) = \frac{d^k b}{da^k}(a_0)$$

# Exercice

Dériver  $b^{DL}(a)$  3 fois en  $a_0$  et montrer qu'au point de référence  $a_0$  on a

- $\frac{db^{DL}}{da}(a_0) = \alpha$
- $\frac{d^2b^{DL}}{da^2}(a_0) = 2 \times \beta$
- $\frac{d^3b^{DL}}{da^3}(a_0) = 3 \times 2 \times \gamma$

En déduire les valeurs de  $\alpha, \beta, \gamma$

# Lien avec les dérivées successives (III)

On retrouve ainsi en égalisant les dérivées, et avec la notation de Leibniz la formule de Taylor

$$b(a) \simeq b(a_0) + \frac{db}{da}(a_0)\Delta a + \frac{1}{2!} \frac{d^2b}{da^2}(a_0)\Delta a^2 + \dots + \frac{1}{n!} \frac{d^n b}{da^n}(a_0)\Delta a^n$$

La méthode à suivre pour faire un DL est donc **systematique**

- exprimer  $b$  en fonction de  $a$  (souvent donné dans l'exercice)
- choisir un point de référence  $a_0$  (idem)
- calculer les premières dérivées de  $b$
- en déduire les coefficients du DL et conclure

# Exemple (I)

Pour faire un DL de  $u = \cos(\theta)$  autour de  $\theta_0 = \pi/3$ , on calcule les valeurs successives des dérivées de  $u$  en  $\theta_0$ .

- $u(\theta_0) = \cos(\theta_0) = \frac{1}{2}$
- $\frac{du}{d\theta}(\theta_0) = -\sin(\theta_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\frac{d^2u}{d\theta^2}(\theta_0) = -\cos(\theta_0) = -\frac{1}{2}$
- $\frac{d^3u}{d\theta^3}(\theta_0) = \sin(\theta_0) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

## Exemple (II)

D'ou on déduit que si  $\theta$  reste proche de  $\theta_0 = \frac{\pi}{3}$ , on a

$$\begin{aligned}u(\theta) = \cos(\theta) &\simeq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{3!} \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)^3 \\ &\simeq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{4} \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)^3\end{aligned}$$

# Exercice

En appliquant la procédure vue dans l'exemple, calculer un  $DL_3$  des fonctions suivantes

- $v = \tan(u)$  lorsque  $u$  est proche de  $\frac{\pi}{6}$
- $v = \ln(u)$  lorsque  $u$  est proche de 2
- $A = 1 + t + 2t^2 + 3t^3$  lorsque  $t$  est proche de 1. Montrer que dans ce cas-là, le DL est en fait rigoureusement égal à  $A$  mais écrit sous une autre forme
- $A = 1 + t + 2t^2 + 3t^3$  lorsque  $t$  est proche de 0. Commenter le résultat

# Exercice - Proposition

Dans la pratique, on se ramène toujours à des DLs en 0 et il est bon de connaître les  $DL_3(0)$  des fonctions suivantes (à calculer comme vu dans l'exemple)

$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$
$\frac{1}{1+u}$		$\frac{1}{1-u}$
$e^u$		$e^{-u}$
$\sqrt{1+u}$		$\sqrt{1-u}$
$\ln(1+u)$		$\ln(1-u)$
$(1+u)^\alpha$		$(1-u)^\alpha$

# DLs classiques

Les DLs suivants au voisinage de 0 sont à connaître.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + o(x^{2n})$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+1})$$

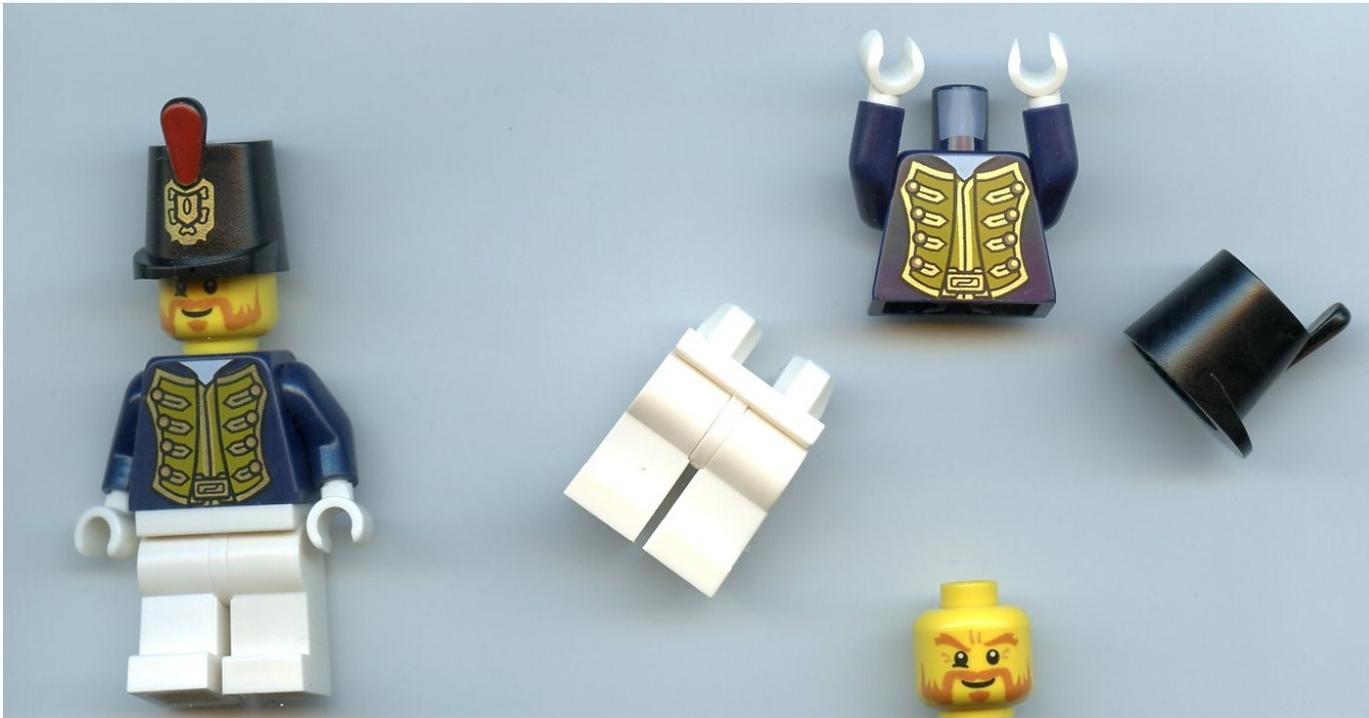
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots \\ + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n + o(x^n)$$

# Opérations sur les DLs

Comme pour les limites et les dérivées, on peut aussi utiliser des règles pour combiner les DLs.



# Addition, multiplication de DL

Si  $f$  et  $g$  admettent toutes deux un  $DL_n$  en 0 et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

- $f + g$  admet un  $DL_n$  en 0, qui s'obtient en additionnant les parties polynômiales des  $DL_n$  de  $f$  et  $g$  (penser à la linéarité de la dérivée:  $(f + g)^{(k)} = f^{(k)} + g^{(k)}$ )
- $f \times g$  admet un  $DL_n$  en 0, qui s'obtient en multipliant les parties polynômiales des  $DL_n$  de  $f$  et  $g$  et **en ne gardant que les termes de degrés  $\leq n$** .
- $\lambda f$  admet un  $DL_n$  en 0, qui s'obtient en multipliant la partie polynômiale du  $DL_n$  de  $f$  par  $\lambda$ .

# Exemple

- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$
- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

On a donc (les termes en rouges sont des  $o(x^2)$ ):

- $e^x + \cos(x) = 2 + x + o(x^2)$  (terme d'ordre 2 du  $DL_2$  nul)
- $$\begin{aligned} e^x \cos(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + x - \frac{x^3}{2} + o(x^3) + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\ &\quad + o(x^2) + o(x^4) + o(x^4) \\ &= 1 + x + o(x^2) \end{aligned}$$

# Composition

Soit  $f : A \rightarrow B$  et  $g : B \rightarrow C$  deux fonctions avec

$$0 \in A, 0 \in B \text{ et } f(0) = 0$$

Si  $f$  et  $g$  admettent toutes deux un  $DL_n$  en  $0$ , alors  $g \circ f$  s'obtient en composant les parties polynômiales des  $DL_n$  de  $f$  et  $g$  et **en ne gardant que les termes de degrés  $\leq n$** .

# Exemple (I)

Avec  $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$  et  $\frac{x}{1+x} = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$ , on pose implicitement  $X = \frac{x^2}{1+x}$  (petit quand  $x$  est proche de 0).

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{x}{1+x}\right) &= \sin(X) \\ &= X - \frac{X^3}{3!} + o(X^3)\end{aligned}$$

## Exemple (II)

Pour finir le calcul, on développe et on ne garde que les termes de degré au plus 3

$$X = x - x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$X^2 = (x - x^2 + x^3 + o(x^3))^2 = x^2 - 2x^3 + o(x^3)$$

$$X^3 = (x - x^2 + x^3 + o(x^3))^3 = x^3 + o(x^3)$$

$$o(X^3) = o(x^3)$$

et donc au final

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{x}{1+x}\right) &= x - x^2 + x^3 - x^3/6 + o(x^3) \\ &= x - x^2 + \frac{5x^3}{6} + o(x^3) \end{aligned}$$

# Quotient

Comme d'habitude, quotienter par  $f$  revient à multiplier par  $1/f$ , on cherche donc un  $DL_n$  de  $1/f$ .

Soit  $f$  une fonction admettant le  $DL_n(0)$  suivant:

$$f(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)$$

- Si  $b_0 = 0$ , alors  $1/f$  n'a pas de DL en 0
- Sinon,  $1/f$  admet un  $DL_n(0)$  obtenu en écrivant:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f(h)} &= \frac{1}{b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + o(x^n)} \\ &= \frac{1}{b_0} \frac{1}{1 + \frac{b_1}{b_0}x + \cdots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)} \end{aligned}$$

Et il faut donc composer le  $DL_n(0)$  de  $u \mapsto \frac{1}{1+u}$  avec  $u = \frac{b_1}{b_0}x + \cdots + \frac{b_n}{b_0}x^n + o(x^n)$ .

Les calculs à faire peuvent être un brin compliqués...

# Exemple (I)

On va calculer le  $DL_2(0)$  de  $1/e^x$ . On sait que

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) = 1 + u$$

avec  $u = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ . On va donc composer avec le  $DL_2(0)$  de  $\frac{1}{1+u}$ , à savoir

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

## Exemple (II)

On commence par calculer  $u^2$  (et il est clair que  $o(u^2) = o(x^2)$ )

$$u^2 = \left(x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)^2 = x^2 + o(x^2)$$

D'où on tire

$$\begin{aligned}\frac{1}{e^x} &= \frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2) \\ &= 1 - \left(x + \frac{x^2}{2}\right) + x^2 + o(x^2) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\end{aligned}$$

## Exemple (III)

Dans ce cas précis, on aurait aussi pu remarquer que  $1/e^x = e^{-x}$  et se rappeler que le  $DL_2(0)$  de  $e^{-x}$  est

$$\begin{aligned} e^{-x} &= 1 + (-x) + \frac{(-x)^2}{2} + o((-x)^2) \\ &= 1 - x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) \end{aligned}$$

On retrouve heureusement le même résultat

# Exercices

Calculer les  $DL$ s suivants (ceux notés  $[*]$  sont difficiles)

$$DL_4(0) \text{ de } \frac{x}{\sin(x)}$$

$$DL_2(0) \text{ de } \ln(a^x + b^x) \quad [*]$$

$$DL_4(0) \text{ de } \frac{1}{\cos(x)}$$

$$DL_4(\pi/2) \text{ de } \sin(x)^{\sin(x)} \quad [*]$$

$$DL_2(\pi/4) \text{ de } \sqrt{\tan(x)}$$

$$DL_1(0) \text{ de } \sqrt{1 + \sqrt{1 - x}}$$

$$DL_4(0) \text{ de } e^{\cos(x)}$$

$$DL_3(0) \text{ de } x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$DL_3(1) \text{ de } \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$$

# Solutions (I)

Calculer les *DLs* suivants

$$\begin{aligned}\frac{x}{\sin(x)} &= \frac{1}{1 - [x^2/3! - x^4/5! + o(x^4)]} \\ &= 1 + [x^2/3! - x^4/5!] + [x^2/3! - x^4/5!]^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ln(a^x + b^x) &= x \ln(a) + \ln(1 + (b/a)^x) \\ &= x \ln(a) + \ln(2) + \frac{1}{2}[(b/a)^x - 1] - \frac{1}{8}[(b/a)^x - 1]^2 \\ &= \ln(2) + \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}x + x^2 \frac{\ln^2(b/a)}{2} - \frac{1}{8}x^2 \ln^2(b/a) + o(x^2) \\ &= \ln(2) + \frac{\ln(a) + \ln(b)}{2}x + \frac{3(\ln(a) - \ln(b))^2}{8}x^2 + o(x^2)\end{aligned}$$

# Solutions (II)

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos(x)} &= \frac{1}{1 - [x^2/2! - x^4/4! + o(x^4)]} \\ &= 1 + [x^2/2! - x^4/4!] + [x^2/2! - x^4/4!]^2 + o(x^4) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4) \\ \sin(x)^{\sin(x)} &= \sin(\pi/2 + h)^{\sin(\pi/2+h)} = \cos(h)^{\cos(h)} \\ &= \exp\left[(1 - h^2/2 + h^4/24) \ln(1 - h^2/2 + h^4/24)\right] + o(h^4) \\ &= \exp\left((1 - h^2/2 + h^4/24)(-h^2/2 + h^4/24 - h^4/8)\right) + o(h^4) \\ &= \exp\left((1 - h^2/2 + h^4/24)(-h^2/2 - h^4/12)\right) + o(h^4) \\ &= \exp\left(-h^2/2 - h^4/12 + h^4/4\right) + o(h^4) \\ &= \exp\left(-h^2/2 + h^4/6\right) + o(h^4) \\ &= 1 + (-h^2/2 + h^4/6) + (-h^2/2 + h^4/6)^2/2 + o(h^4) \\ &= 1 - h^2/2 + h^4/6 + h^4/8 = 1 - \frac{h^2}{2} + \frac{7h^4}{24} + o(h^4)\end{aligned}$$

# Solutions (III)

$$\tan(\pi/4 + x) = \tan(\pi/4) + \tan'(\pi/4)x + \frac{\tan''(\pi/4)}{2}x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + 2x + 2x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\sqrt{\tan(\pi/4 + x)} = \sqrt{1 + (2x + 2x^2) + o(x^2)}$$

$$= 1 + (x + x^2) - \frac{1}{8}(2x + 2x^2)^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + x + x^2 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) = 1 + x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

# Solutions (IV)

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{x}{2} + o(x)$$

$$\sqrt{2+h} = \sqrt{2} + \frac{h}{2\sqrt{2}} + o(h)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{1 + \sqrt{1-x}} &= \sqrt{1 + (1 - x/2)} + o(x) \\ &= \sqrt{2 - x/2} + o(x) = \sqrt{2} - \frac{x}{4\sqrt{2}} + o(x)\end{aligned}$$

# Solutions (V)

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

$$e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

$$\begin{aligned} e^{\cos(x)} &= e^{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}} + o(x^4) = e \left( e^{-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}} \right) + o(x^4) \\ &= e \left( 1 + \left( -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right) + \frac{\left( -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \right)^2}{2} \right) + o(x^4) \\ &= e \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{8} \right) + o(x^4) \\ &= e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

Comme le calcul fait intervenir  $e^h$  avec  $h$  d'ordre  $x^2$ , il suffit de faire un DL<sub>2</sub> de exp en  $h$  pour avoir un DL<sub>4</sub> en  $x$ .

# Solutions (VI)

$$\sqrt{1+x} = 1 + x/2 - x/8 + o(x^2)$$

$$\sqrt{1/(1-x)} = (1-x)^{-1/2}$$

$$= 1 - \frac{1}{2}(-x) + \frac{3}{8}(-x)^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + x/2 + 3x^2/8 + o(x^2)$$

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = (1 + x/2 - x^2/8)(1 + x/2 + 3x^2/8) + o(x^2)$$

$$= 1 + x + o(x^2)$$

$$x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = x + x^2 + o(x^3)$$

Comme on multiplie par  $x$  à la fin, on se contente d'un DL<sub>2</sub> de  $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ .

# Solutions (VI)

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$= x \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2) \right)$$

$$\frac{\ln(1+x)}{\sqrt{1+x}} = x \left[ \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} \right) \left( 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 \right) + o(x^2) \right]$$

$$= x \left[ 1 - x + \frac{23}{24}x^2 + o(x^2) \right]$$

$$= x - x^2 + \frac{23}{24}x^3 + o(x^3)$$

Comme  $\ln(x) = x + o(x)$  et qu'on multiplie, on se contente d'un DL<sub>2</sub> de  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ .

On obtiendra bien un DL<sub>3</sub> après multiplication.

**Retour sur les DLs d'ordre 1 et 2**

# DL d'ordre 1 en physique

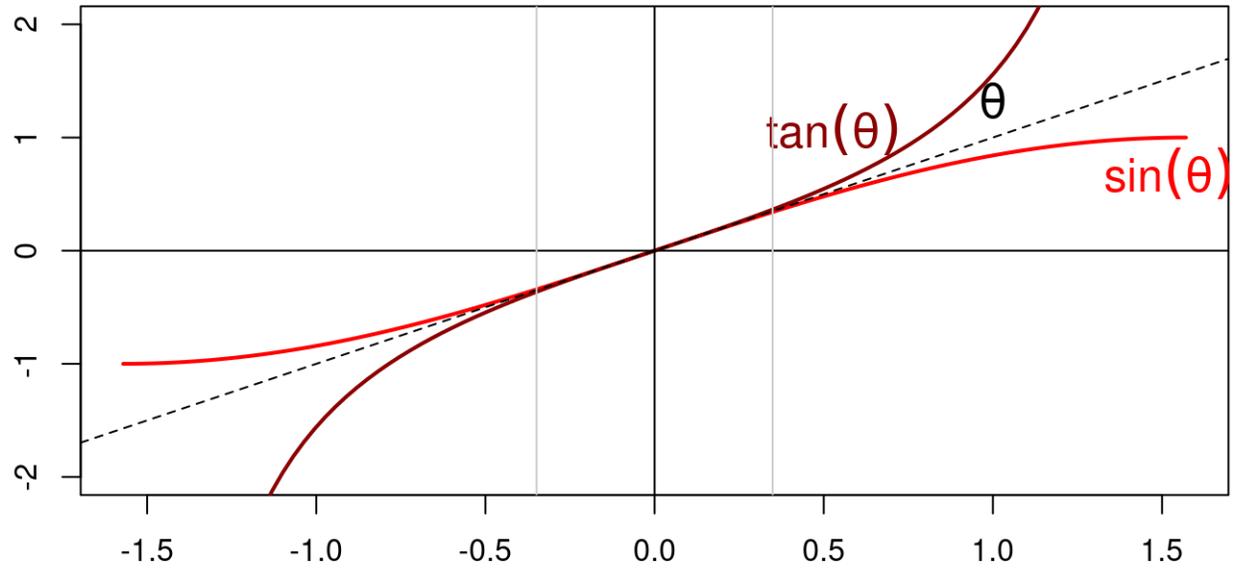
Physiquement, l'approximation d'ordre 1 considère que les variations  $\Delta b$  et  $\Delta a$  sont proportionnelles, et ce dans le même rapport que les différentielles  $db$  et  $da$ .

Du point de vue graphique, cela revient à confondre la courbe de  $b(a)$  avec une droite (en l'occurrence sa tangente en  $a_0$ ). Les  $DL_1(0)$  sont très utilisés pour remplacer des petits angles  $\theta$ , ils permettent d'écrire

- $\sin(\theta) \simeq \theta$
- $\tan(\theta) \simeq \theta$

qui est une très bonne approximation pour des petits angles (de l'ordre de 0.3490659 radians).

# Représentation graphique



# DL d'ordre 2 en physique

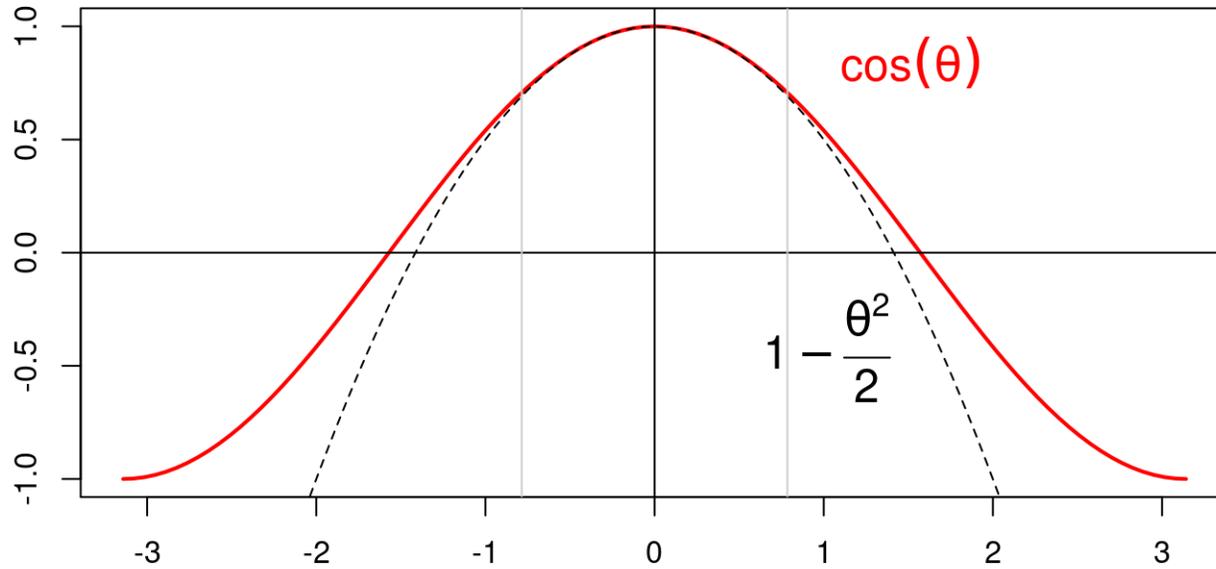
Si on s'éloigne un peu trop du point de référence  $a_0$  (et pour certaines valeurs de  $a_0$ ), l'approximation par une droite n'est pas très satisfaisante et il faut rajouter un terme correctif en  $(a - a_0)^2$  pour obtenir une meilleure approximation. Ceci revient à approcher le graphe de  $b(a)$  par une *parabole*.

Le  $DL_2(0)$  est très utilisé pour remplacer le cos de petits angles  $\theta$ , il permet d'écrire

- $\cos(\theta) \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$

qui est une très bonne approximation pour des petits angles (jusqu'à 0.7853982 radians).

# Représentation graphique



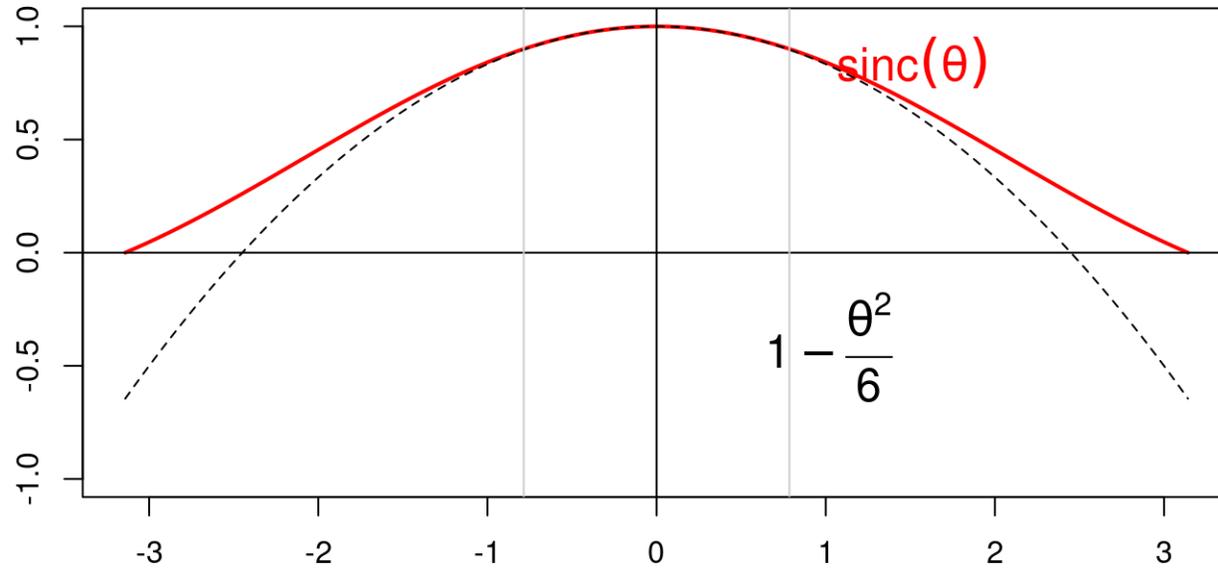
# Exercice

En optique ondulatoire, on a souvent affaire à la fonction *sinus cardinal* définie par

$$\text{sinc}(x) = \frac{\sin(x)}{x}$$

En partant du DL de  $\sin$ , trouver directement le  $DL_4(0)$  de  $\text{sinc}(x)$ . Pourquoi peut-on définir  $\text{sinc}(0) = 1$  ? Que peut-on dire de la dérivée première du sinus cardinal lorsque  $x$  tend 0 ? Et du signe de sa dérivée seconde ?

# Représentation graphique



# Intérêt en mathématiques

Les DLs permettent de calculer très facilement des limites. En particulier, la règle de l'Hopital est un cas particulier de DLs.

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} &= \frac{f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)}{g'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)} \\ &= \frac{f'(x_0) + o(1)}{g'(x_0) + o(1)} \xrightarrow{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} \end{aligned}$$

# Intérêt en mathématiques (II)

On peut aussi retrouver des limites classiques en 0

$$e^x = 1 + x + o(x) \Rightarrow \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\sin(x) = x + o(x) \Rightarrow \frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

$$\ln(1 + x) = x + o(x) \Rightarrow \frac{\ln(1 + x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$$

et d'autres plus neuves

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \Rightarrow \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{2}$$

# Exercices d'applications (I)

- Dans le modèle du gaz parfait avec  $PV = nRT$ , on considère une enceinte étanche thermostatée (nombre de moles et température constants). On suppose que le volume de l'enceinte passe de  $V$  à  $V + \Delta V$ . La pression évolue en conséquence de  $P$  à  $P + \Delta P$ . Relier  $\Delta P$  à  $\Delta V$  en faisant un DL au premier ordre. Comment se compare les variations relatives  $\Delta P/P$  et  $\Delta V/V$ .
- On considère une sphère de rayon  $R$  et de surface  $S$ . On suppose que le rayon de la sphère passe de  $R$  à  $R + \Delta R$ . La surface évolue en conséquence de  $S$  à  $S + \Delta S$ . Relier  $\Delta S$  à  $\Delta R$  en faisant un DL au premier ordre. Comment se compare les variations relatives  $\Delta S/S$  et  $\Delta R/R$ .

# Exercices d'applications (II)

- On cherche à évaluer le comportement de la quantité  $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + \tau^2}}$  lorsque  $t$  est petit devant  $\tau$ . Exprimer  $f(t)$  sous la forme  $C(1 + x)^\alpha$  où  $x = t/\tau$  est une quantité sans dimension très petite et  $C$  et  $\alpha$  sont des constantes à déterminer. En faisant ensuite un DL à l'ordre 2 de  $(1 + x)^\alpha$ , en déduire un DL<sub>2</sub> de  $f(t)$ .

# Exercices d'applications (III)

En utilisant les DL (et surtout les théorèmes d'opérations) calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\ln(1+x) \sin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \tan(x)}{\sin(x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan(x))}{\sin(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)(\tan(\pi x/4) - 1)}{(x-1)^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right)$$

Les courageux peuvent aussi essayer de calculer les DL<sub>1</sub> des 6 premières fonctions.

# Exercices d'applications (III): Réponses

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{\ln(1+x) \sin(x)} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) \tan(x)}{\sin(x^2)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+1}{2x-1} \right)^{2x} = e^2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \tan(x))}{\sin(x)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)(\tan(\pi x/4) - 1)}{(x-1)^2} = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right) = -\frac{e}{2}$$