Dérivée partielle

Mahendra Mariadassou

18 novembre 2019

Plan du cours

- Notions de différentielles
- Opérations sur les différentielles

Objectifs

- Différencier une expression (par exemple $PV = nRT$)
- Manipuler des différentielles
- Manipuler des relations entre différentielles

Définition et propriété fondamentale

La différentielle de x notée dx (parfois Δx en physique) correspond à une variation **infinitésimale** ($\simeq$ toute petite) de x

Si f est une fonction numérique (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et que $y = f(x)$, alors il existe une relation entre dy et dx donnée par

$$dy = f'(x)dx$$

où f' est la fonction dérivée de f.

Interprétation: Une petite variation (de taille dx) de la quantité x se traduit par une petite variation (de taille $dy = f'(x)dx$) de la quantité y

Remarque(s)

Il existe un lien **essentiel** entre différentielles et dérivées (qu'on verra en détails plus tard) mais on peut retenir pour l'instant

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Rightarrow dy = d(f(x)) \\ &\Leftrightarrow dy = f'(x)dx \\ &\Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = f'(x) \end{aligned}$$

Exercice

Exprimer dy en fonction de dx quand y et x sont liés par les relations suivantes:

- $y = ax + b$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$)
- $y = x^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^\star$)
- $y = \ln(x)$
- $y = e^{\alpha x}$ ($\alpha \in \mathbb{R}$)
- $y = x^\alpha$ (avec $\alpha \in \mathbb{R}$), on pourra écrire $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$

Intégration d'une différentielle

Si f est une fonction numérique (de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$) et que $y = f(x)$ de dérivée f' alors

$$\int f'(x)dx = y + K \ (= f(x) + K)$$

où K est une constante arbitraire

Intuition: On peut retenir que d et $\int$ sont des opérations (presque) inverses et écrire

$$\int f'(x)dx = \int d(f(x)) = \int dy = y \ (+K)$$

la constante émerge du fait que $\int$ et d ne sont pas exactement inverses.

Exercices

À partir des relations suivantes, trouver un lien entre y et x

- $dy = 5dx$
- $dy = nx^{n-1}dx$
- $dy = \frac{dx}{x}$
- $dy = \alpha e^{\alpha x}dx$
- $dy = \cos(x)dx$
- $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$

Fonction de plusieurs variables

Une **fonction f de plusieurs variables** associe à $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un nombre réel $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}$. On la note

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto & f(x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Dans le cas le plus simple ($n = 2$), on remplace généralement (x_1, x_2) par (x, y) et on définit f par son expression:

$$f(x, y) = 4x + 3y$$

ou encore

$$f : (x, y) \mapsto z = 4x + 3y$$

Dérivées partielles (I)

En un point donné, on peut définir plusieurs fonctions partielles d'une seule variable en

- laissant une variable libre
- fixant les autres

Par exemple en (x_0, y_0), on peut définir deux fonctions

- $g_{y_0} : x \mapsto f(x, y_0)$ qui dépend uniquement de x (y_0 est un paramètre)
- $h_{x_0} : y \mapsto f(x_0, y)$ qui dépend uniquement de y (x_0 est un paramètre)

et on définit les **dérivées partielles** de f à partir de ces fonctions.

Dérivées partielles (II)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Les dérivées partielles de f par rapport à x et y en (x_0, y_0) sont $h'_{x_0}(y_0)$ et $g'_{y_0}(x_0)$ où g_{y_0} et h_{x_0} sont définies par $g_{y_0}(x) = f(x, y_0)$ et $h_{x_0}(y) = f(x_0, y)$. Elles sont notées

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = g'_{y_0}(x_0) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = h'_{x_0}(y_0)$$

Les fonctions correspondantes sont notées $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Remarque Si $z = f(x, y)$, on peut aussi écrire $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Exercice

On suppose que x, y, z sont liés par les relations suivantes. Calculer les dérivées partielles de z par rapport à x et y.

- $z = x + y$
- $z = xy$
- $z = x/y$
- $z = x\ln(y)$
- $z = e^{x+y}$
- $z = x^\alpha y^\beta$
- $z = x^3y^2 + \sin^2(y) + 3x$

Dérivées partielles: généralisations

- On peut assez facilement généraliser les définitions précédentes à des fonctions n variables.
- On peut également calculer des dérivées **secondes**.

Sous des conditions vérifiées pour toutes les fonctions du cours, le théorème de Schwartz garantit que l'ordre de dérivation est indifférent:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial z}{\partial y}\right] = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right] = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

Théorème de Scharwz

On va vérifier le théorème de Schwarz sur $z = e^{xy}$.

Si on dérive par rapport à y puis par rapport à x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial e^{xy}}{\partial y} = & xe^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial x e^{xy}}{\partial x} = & e^{xy} + xye^{xy}\end{aligned}$$

Si on dérive par rapport à x puis par rapport à y:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial e^{xy}}{\partial x} = & ye^{xy} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial y e^{xy}}{\partial y} = & e^{xy} + xye^{xy}\end{aligned}$$

Et le théorème est donc vérifié sur cet exemple.

Différentielle Totale

- On sait relier dy et dx quand il existe une relation entre $y = f(x)$.
- Peut-on faire la même chose avec dz, dx et dy si on a une relation $z = f(x, y)$?

Si $z = f(x, y)$ où f est une fonction numérique (de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$), alors la **différentielle totale** de z est

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

Différentielle Totale

On peut retrouver ce résultat par analogie avec les différentielles de fonctions univariées:

$$dy = \frac{dy}{dx} dx$$

Les deux différences majeures concernent le: - nombre de différentielles (une par variables dépendante): $dx \rightarrow dx, dy, \ldots$ - les coefficients multiplicatifs (dérivées partielles au lieu de dérivées droites): $\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y} \ldots$

Exercice

Calculer la différentielle totale des fonctions suivantes:

- $z = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$
- $z = x^3 y^2 + \sin^2(y) + 3x$
- $PV = nRT$ (en prenant successivement P, V et T commes variables réponses)

Fonctions composées

Quand on écrit $\frac{\partial f}{\partial x}$, on désigne par convention la dérivée partielle par rapport à la variable x avec l'idée implicite que f s'écrit sous la forme $f(x, y) = \ldots$.

Mais comment faire face à des expressions de la forme $f(x - y, x + y)$?

On va *composer* les différentielles totales et identifier les coefficients pour trouver les dérivées partielles. C'est le même raisonnement que pour la dérivée de fonctions composées: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$.

On commence par poser une fonction intermédiaire

$$g(x, y) = f(\underbrace{u}_{=x-y}, \underbrace{v}_{=x+y})$$

Fonctions composées (II)

Avant d'écrire des égalités entre les différentielles totales:

$$\mathrm{d}g(x,y) = \mathrm{d}f(u,v)$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial u}\mathrm{d}u + \frac{\partial f}{\partial v}\mathrm{d}v$$

Puis on développe les différentielles totales de u et v

$$\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial u}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right] + \frac{\partial f}{\partial v}\left[\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right]$$

Avant de remplacer les différentielles partielles de partielles de u et v par rapport à x et y par leurs valeurs.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -1 \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1 \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1$$

Fonctions composées (III)

En substituant les dérivées partielles par leurs valeurs en triant les termes $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$ ensemble, on obtient:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y = \frac{\partial f}{\partial u}[\mathrm{d}x - \mathrm{d}y] + \frac{\partial f}{\partial v}[\mathrm{d}x + \mathrm{d}y]$$
$$\frac{\partial g}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial g}{\partial y}\mathrm{d}y = \left[\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right]\mathrm{d}x + \left[-\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right]\mathrm{d}y$$

Par identification des coefficients

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v} \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}$$

Attention, on a utilisé la notation $\frac{\partial f}{\partial u}$ pour bien distinguer u et x mais il s’agit bien de la dérivée partielle par rapport à la **première coordonnée**, traditionnellement notée $\frac{\partial f}{\partial x}$

Fonctions composées (IV)

En remplaçant les dérivées partielles par les écritures habituelles et en substituant u et v par leurs expressions, on aboutit à

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x-y,x+y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x-y,x+y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}(x-y,x+y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x-y,x+y)$$

Où $\frac{\partial f}{\partial x}$ représente bien la dérivée partielle de f par rapport à sa première coordonnée (indépendamment de l'expression de cette première coordonnée).

Fonctions composées (V)

De façon générale, si $g(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ avec f, g, u et v dérivable, on a

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \times \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$
$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial v}(u,v) \times \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

Ou de façon compacte

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \times \frac{\partial v}{\partial y}$$

Différentielle logarithmique

Dans certains cas (produits, puissances), il est parfois plus facile de calculer une différentielles totale en échelle logarithmique (pratique pour des incertitudes relatives)

$$
\begin{aligned}
PV = nRT &\Leftrightarrow \ln(P) + \ln(V) = \ln(nR) + \ln(T) \\
&\Rightarrow \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V} = \frac{dT}{T}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P = V^{\gamma} &\Leftrightarrow \ln(P) = \gamma \ln(V) \\
&\Rightarrow \frac{dP}{P} = \gamma \frac{dV}{V} \\
&\Rightarrow dP = \gamma \frac{P}{V} dV \\
&\Rightarrow dP = \gamma V^{\gamma - 1} dV
\end{aligned}
$$

Application (I)

On considère un cylindre droit de hauteur $h = 50$ cm et de rayon $r = 10$ cm et de volume V. On s'intéresse à la variation de volume quand on augmente h de 2 cm et diminue r de 1 cm.

- Calculer exactement la variation de volume ΔV
- Calculer la variation de volume ΔV de façon approchée (en l'approchant par la différentielle dV)
- Calculer la variation de volume relative $\frac{\Delta V}{V}$ (de façon approchée)

Application (II)

On effectue une transformation adiabatique et réversible sur un gaz parfait pour le faire passer de l'état (P_0, V_0) à l'état (P_1, V_1).

On sait que $\delta Q = dU - dW$, que pour ce gaz l'énergie interne dépend uniquement de la témperature ($dU = nC_v dT$) et que le travail des forces de pression s'écrit $dW = -PdV$. On a donc

$$0 = \frac{\delta Q}{T} = nC_v \frac{dT}{T} + P\frac{dV}{T} = nC_v \frac{dT}{T} + nR\frac{dV}{V}$$

De plus $\frac{dT}{T} = \frac{dP}{P} + \frac{dV}{V}$ et $R/C_v = \gamma - 1$ donc

$$0 = nC_v \left[\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V}\right] = nC_v \left[\frac{dP}{P} + \gamma\frac{dV}{V}\right]$$

Application (III)

Au final, on arrive à

$$\frac{dP}{P} + \gamma \frac{dV}{V} = 0$$

qui peut se réécrire

$$PV^{\gamma} = Constante$$

Et on retrouve la loi de Laplace pour les détentes adiabatiques.

Mesure d’incertitude

À l’aide des différentielles logarithmiques, relier les incertitudes relatives, *i.e.* de la forme $\frac{\Delta V}{V}$,

- du volume d’une sphère et de son rayon
- de la surface d’un disque et de son rayon
- du volume d’un cube et de son côté
- de la surface d’un carré et de son côté
- du volume d’un cône et de son rayon
- du volume d’un cône et de sa hauteur

Plus de calculs (I)

Calculer les dérivées partielles des fonctions $f(x,y)$ suivantes

- $f(x,y) = (x^2 - 3xy + y^4)/(2x+3y)$
- $f(x,y) = e^{5\cos(xy)}$
- $f(x,y) = (x^2 + xy + y^2)\cos(xy)$
- $f(x,y) = 2xy/e^{x+y}$

Plus de calculs (II)

- Calculer toutes les dérivées d'ordre ≤ 2 de la fonction $f(x, y) = x^2 + 3xy^5 + \cos(xy)$
- Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ pour $f(x, y) = \cos(ax^p y^q) + \sin(bx^r y^s)$ avec (a, b) des réels et p, q, r, s des entiers positifs.
- Trouver les points qui vérifient simultanément $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ pour $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ et $f(x, y) = x^3 y + xy^2$
- Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}$ et $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$ pour $f(x, y, z) = (x^2 + xy + yz)e^{x+2y}$