Équations différentielles (simple)

Mahendra Mariadassou

10 Mars 2021

Introduction

Avant propos (I)

L'objectif de ce cours est de présenter et d'apprendre à résoudre des équations différentielles du premier ordre. Les équations différentielles interviennent naturellement en:

- physique (principe fondamental de la dynamique),
- chimie (cinétique d'une réaction),
- biologie (dynamique des population, épidémiologie).

Une **équation différentielle** est une équation que doit vérifier une fonction, disons $y(x)$, et qui fait intervenir au moins une de ses dérivées, par exemple $y'(x)$.

Définition

Soit $I = [a, b]$ un segment, $x \mapsto a(x)$ et $x \mapsto b(x)$ deux fonctions continues sur I et (E) l'équation différentielle

$$y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$$

La fonction $f(x)$ est solution de (E) sur I si elle est vérifie l'égalité $f'(x) = a(x)f(x) + b(x)$ pour tout $x \in I$.

L'équation précédente est dite **linéaire du premier ordre** car elle fait uniquement intervenir

- y et y' sans transformation, par opposition à y^2, $\ln(y')$, etc (linéaire)
- les dérivées d'ordre au plus 1, par opposition à y'', $y^{(3)}$, etc (premier ordre)

Conditions Initiales

Une équation différentielle admet en général une **infinité** de solutions qui ne diffèrent que par la valeur d'une ou plusieurs constantes.

L'ensemble des solutions est appelé **solution générale** de l'équation différentielle. Lorsque qu'on cherche à résoudre un problème concret, on impose en général des **conditons limites** (par exemple la position initiale en mécanique, ou la concentration initiale d'un substrat en chimie).

L'unique solution qui vérifie ces conditions limites (si elle existe) est dite solution particulière de l'équation différentielle.

Exemple

L'équation différentielle

$$y'(x) = y(x)$$

admet comme solution générale sur $\mathbb{R}$ la fonction $y(x) = Ae^x$ avec A une constante quelconque.

Si on impose la condition limite $y(0) = 2$, on peut vérifier que la constante A doit valoir 2 pour que la condition soit vérifiée (puisque $y(0) = A$).

La solution particulière qui vérifie $y(0) = 2$ est donc $y(x) = 2e^x$.

Exercices

Parmi les équations suivantes, lesquelles sont linéaires d'ordre 1?

- $y(x) - y'(x) = 0$
- $y(x) - y'(x) - y''(x) = 0$
- $\lambda y(x) - y'(x) = 0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$
- $f(x) - y'(x) = 0$ avec $f(x)$ une fonction continue
- $y^2(x) - y'(x) = 0$
- $y(x) - (y'(x))^2 = 0$
- $y'(x) - y''(x) = 0$

Méthodes de résolution: fonctions tests

Essai de fonctions tests

Avant de présenter des méthodes **systématiques** mais compliquées, on doit rappeler que la première méthode de résolution est l'**essai de fonctions tests**.

Si la solution saute aux yeux, inutile de se fatiguer avec des calculs compliquées. Et dans le cas contraire, on peut toujours essayer avec des *fonctions tests simples* (exponentielle, logarithme, fonctions trigonométrique, fonctions puissances) et essayer de bricoler pour trouver la solution.

Dans tous les cas, il suffit d'injecter notre fonction test et sa dérivée première (ou d'autres dérivées si on a affaire à des équations d'ordre supérieur à 1) dans l'équation différentielle et de vérifier si cette dernière est vérifiée.

Exemple (I)

On cherche à résoudre l'équation $x^2y'(x) = 5$. On essaie différentes fonctions tests:

- $y(x) = e^x$ donne $y'(x) = e^x$ et on a $x^2y'(x) = x^2e^x \neq 5$
- $y(x) = \ln(x)$ donne $y'(x) = 1/x$ et on a $x^2y'(x) = x \neq 5$
- $y(x) = x^\alpha$ (avec α à déterminer) donne $y'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ et on a $x^2y'(x) = \alpha x^{\alpha-1} \neq 5$ qui est constant si $\alpha = -1$.

On y est presque, $y(x) = 1/x$ donne $x^2y'(x) = -1$ qui est certes différent de 5 mais seulement à une constante multiplicative près.

Exemple (II)

On teste donc $y(x) = -5/x$ qui donne bien $x^2 y'(x) = 5$.

On a donc trouvé une solution de l'équation $x^2 y'(x) = 5$ et on peut remarquer à ce niveau que toutes les fonctions

$$x \mapsto -5/x + A$$

avec A une constante arbitraire sont solutions (c'est la fameuse **solution générale**).

Exercices

En essayant plusieurs fonctions tests (simples) en les modifiants, trouver une solution aux équations différentielles

- $y'(x) = 10$
- $y''(x) = 10$
- $xy'(x) = 1$
- $xy'(x) = y(x)$
- $y'(x) = 1 + y^2(x)$
- $y'(x) = \sqrt{x}$
- $y'(x) + y(x) = 0$
- $y''(x) + \omega^2 y(x) = 0$

Commentaires

La méthode des fonctions tests est intéressante mais présente des défauts majeurs:

- elle ne fonctionne pas à tous les coups
- elle permet de trouver une solution mais pas forcément toutes (la solution générale)
- l'absence de solution générale est pénalisant si on veut imposer des conditions limites: un boulet de canon et un objet laché sans vitesse initiale vérifient la même équation différentielles mais ont pourtant des trajectoires très différentes à cause de leurs conditions limites différentes

Équations directement intégrables

Principe (I)

Il arrive que l'analyse scientifique du phénomène aboutisse à une relation du type

$$db = f(a)da$$

pour une certaine fonction $f(a)$, qui peut se réexprimer en

$$\frac{db}{da} = f(a)$$

ce qui signifie que $b(a)$ est une primitive de $f(a)$.

Primitive (II)

En particulier, si $F(a)$ est une primitive quelconque de $f(a)$, la solution générale de l'équation est

$$b(a) = F(a) + K$$

où K est une constante. La solution générale est déterminée à une constante près, c'est caractéristique des équations du premier ordre.

Primitive (III)

La valeur de la constante K est généralement donnée par une **condition limite** $b(a_0) = b_0$.

En injectant dans l'équation précédente, on trouve $K = b(a_0) - F(a_0) = b_0 - F(a_0)$.

Les équations précédentes qui peuvent se mettre sous la forme $\frac{db}{da} = f(a)$ et se résoudre en cherchant une primitive de f sont dites **directement intégrables**.

Exercices

Résoudre les équations directement intégrables suivantes (en prenant soin de vérifier **à posteriori** que la solution trouvée vérifie bien l'équation différentielle et la condition limite):

- $\frac{db}{da} = \cos(a)$ avec cond. lim. $b(\pi/6) = 1/2$
- $\frac{db}{da} = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$ avec cond. lim. $b(1/2) = \pi/6$
- $\frac{df}{dx} = \left(\frac{X}{x}\right)^2 + 1$ avec X constante et cond. lim. $f(X) = 0$
- $\frac{df}{dx} = U\cos(kx)$ avec U, k constantes et cond. lim. $f(0) = \frac{U}{k}$
- $\frac{df}{dx} = \alpha(x - X)^2$ avec α, X constantes et cond. lim. $f(0) = 0$
- $\frac{df}{dx} = -(x - x_0)e^{-\beta(x-x_0)^2}$ avec β, x_0 constantes et cond. lim. $f(x_0) = 0$
- $\frac{dy}{dt} = v_0$ avec v_0 constante et cond. lim. $y(t_0) = y_0$

Application

On lâche une vitesse d'une hauteur H sans vitesse initiale. On néglige les frottements de l'air et considère uniquement l'action de la gravité. On note $v(t)$ sa vitesse (dirigée vers le bas) et $h(t)$ sa hauteur à l'instant t.

- Écrire l'équation différentielle et la condition initiale vérifiée par $v(t)$. En déduire $v(t)$.
- Écrire l'équation différentielle et la condition initiale vérifiée par $h(t)$. En déduire $h(t)$.

Méthode de résolution: séparation des variables

Un exemple

Il arrive que l'équation différentielles soit trop compliquée pour être mise sous la forme $db/da = f(a)$, par exemple:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{X^2} \quad \text{avec } X \text{ constante}$$

Dans ce cas-là, il faut recourir à d'autre techniques. L'une d'entre elles consiste à **séparer** les variables pour mettre l'équation sous la forme

$$f(a)da = g(b)db$$

Dans notre exemple, on a par exemple

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{X^2}$$

Principe de résolution

Une équation de la forme $f(a)da = g(b)db$ peut être résolue en trouvant une primitive F de f et une G de g. En effet, en utilisant la notation différentielle

- $dF = f(a)da$
- $dG = g(b)db$

On peut réécrire l'équation:

$$dF = dG$$

Dont la solution générale est évidemment

$$F(a) = G(b) + K$$

Principe de résolution (II)

Là encore, si on se donne une condition limite $b(a_0) = b_0$, la valeur de K est déterminée par

$$K = F(a_0) - G(b_0)$$

et la solution peut se réécrire

$$F(a) - F(a_0) = G(b) - G(b_0)$$

Exemple

L'équation différentielle $\frac{du}{d\theta} = \frac{\cos(\theta)}{u}$ peut-être mise sous la forme séparée $udu = \cos(\theta)d\theta$ ou de façon équivalente:

$$d[u^2/2] = d[\sin(\theta)]$$

La solution générale de l'équation est donc:

$$\frac{u^2}{2} = \sin(\theta) + K$$

Si on impose en plus la condition limite $u(\theta = 0) = 1$, on obtient $K = 1/2$ et la solution peut donc se réécrire sous la forme

$$u(\theta) = \sqrt{2\sin(\theta) + 1}$$

Exercices

Résoudre les équations différentielles suivantes:

- $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{X^2}$ avec X const. et cond. lim. $y(0) = Y$
- $\frac{dy}{dx} = e^{y-x}$ avec cond. lim. $y(0) = \ln(2)$
- $\frac{dv}{du} = n\frac{\cos(u)}{\cos(v)}$ avec n const. et cond. lim. $v(0) = 0$
- $\frac{dv}{du} = 1 + \alpha v$ avec α const. et cond. lim. $v(0) = 1/\alpha$
- $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{x}{y}\right)^2$ avec cond. lim. $y(1) = 0$
- $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2$ avec cond. lim. $y(1) = 1/2$

Exemples importants: croissance bactérienne

Une population bactérienne dans un milieu riche en nutriment contient à l'instant initial N_0 bactéries : ces bactéries peuvent se diviser. Chaque bactérie a la même probabilité par unité de temps de se diviser, notée λ. Pendant un tout petit intervalle de temps dt, chaque bactérie a donc une (toute petite) probabilité λdt de se diviser. Comme il y a $N(t)$ bactéries à l'instant t, il y en a $N(t)\lambda dt$ qui se divisent entre l'instant t et l'instant $t + dt$. La variation du nombre de bactéries entre t et $t + dt$ peut donc s'écrire $dN = N(t)\lambda$ dt. On peut mettre également cette équation différentielle sous la forme :

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N$$

Croissance bactérienne (II)

Il ne s’agit pas d’une équation directement intégrable, on essaye donc de séparer les variables en réécrivant:

$$\frac{dN}{N} = \lambda dt$$

Donc la solution générale est

$$\ln(N) = \lambda t + K$$

Ou encore, en notant $K' = e^K$

$$N(t) = K' e^{\lambda t}$$

Au vu de la condition limite $N(t = 0) = N_0$, on peut montrer que $K' = N_0$ et que la solution est donc

$$N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

En particulièrement, la population double de taille au bout d’un temps $t = \ln(2)/\lambda$, généralement intepreté comme le temps de division.

Exemples: frottements visqueux

Une balle de ping-pong de masse m est lâchée sans vitesse initiale : elle tombe verticalement avec une vitesse $v(t)$, en subissant la force de pesanteur mg dirigée vers le bas ainsi qu'une force de frottement $f = -\alpha v$ (opposée au mouvement et proportionnelle à la célérité de la balle). L'équation différentielle du mouvement s'écrit :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m} v + g$$

On remarque que l'on peut atteindre une vitesse limite constante notée v_∞, pour laquelle l'accélération de la pesanteur compense les frottements : v_∞ vérifie $\frac{dv}{dt} = 0$ et vaut donc :

$$v_\infty = \frac{mg}{\alpha}$$

Frottements visqueux (II)

En introduisant v_∞ précédemment défini dans l'équation on peut la réécrire sous la forme:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}(v - v_\infty)$$

qui n'est pas directement intégrable. On peut néanmoins séparer les variable pour écrire:

$$\frac{dv}{v - v_\infty} = -\frac{\alpha}{m}dt$$

qui s'intègre sous la forme

$$\ln|v - v_\infty| = -\frac{\alpha}{m}t + K$$

Frottements visqueux (III)

Cette solution peut se réécrire:

$$|v - v_\infty| = K'e^{-\frac{\alpha}{m}t} \Leftrightarrow v(t) = v_\infty + Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}$$

avec $K' = e^K$ et $C = \pm K'$ en fonction du signe de $v - v_\infty$. Dans tous les cas, cette solution fait toujours tendre v vers v_∞, indépendamment de la solution initiale.

Notre condition limite $v(0) = 0$ nous permet de déduire $C = -v_\infty$ et donc d'écrire la solution de notre équation:

$$v(t) = v_\infty(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t})$$

Autres exemples

- Un conducteur décide de faire accéler sa voiture de façon uniforme (accélération α uniforme). En écrivant puis résolvant deux équations différentielles, déterminer la position de la voiture à l'instant t. On notera x_0 et v_0 les positions et vitesses initiales.
- Dans le plan (x, y), Déterminer le tracé d'une courbe qui vérifie l'équation $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{y} = 0$ et passe par le point $(0, 1)$. De quelle forme géométrique s'agit-il?

En général

Quelques notions à avoir

- En général on ne pas résoudre **exactement** les équations différentielles.
- On doit avoir recours à des méthodes **numériques** pour approcher les solutions.
- Les équations **directement intégrables** et **séparables** sont des exceptions importantes.
- Une autre grande classe d'équation qu'on sait résoudre (dans la plupart des cas) est celle des équations **linéaires**

Équations linéaires

Une équation différentielle est dite **linéaire homogène** si elle peut être mise sous la forme:

$$a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) + \cdots + a_n(x)f^{(n)}(x) = 0$$

et **linéaire inhomogène** si elle peut être mise sous la forme:

$$a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) + \cdots + a_n(x)f^{(n)}(x) = b(x)$$

La différence consiste en la présence ou non d'un second membre à l'équation.

Principe de superposition

Soit (E) une équation différentielle linéaire homogène et f_1 et f_2 deux solutions de (E). On montre facilement que pour tous réels α_1 et α_2, la fonction $f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ est **encore** une solution de (E). On peut donc superposer des fonctions solutions pour en construire de nouvelles.

Autrement dit, l'ensemble des solutions de (E) est un **espace vectoriel** de fonctions. Pour le caractériser complètement, il suffit donc de déterminer une **base de solutions**.

Mieux, une équation linéaire homogène de degré n admet toujours une base de cardinal n. Il reste donc à trouver ces n fonctions solutions de base…

Équation linéaire homogène à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire homogène est dite à **coefficients constants** si les fonctions coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$ sont constantes (*i.e.* ne dépendent pas de x). Dans ce cas, l'équation peut s'écrire:

$$a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \cdots + a_n f^{(n)}(x) = 0$$

Pour ce type d'équation, on cherche une solution de la forme $f_r : x \mapsto e^{rx}$. En substituant, on constate que f_r est solution si et seulement si r est solution de l'équation **caractéristique**

$$a_0 + a_1 r + \cdots + a_n r^n = 0$$

Équation linéaire homogène à coefficients constants (II)

Sauf cas très particuliers, l'équation caractéristique admet n solutions distinctes notées $r_1, r_2, \ldots, r_n$ (réels ou complexes) qui permettent de construire n solutions particulières de l'équation différentielle. Ces fonctions forment une **famille libre** de dimension n et constituent donc une base de l'espace des solutions.

La solution générale de l'équation différentielle est donc:

$$f = \alpha_1 f_{r_1} + \alpha_2 f_{r_2} + \cdots + \alpha_n f_{r_n}$$

avec $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ déterminés par les conditions limites de l'équation différentielle.

Exercices

- Reprendre l'exercice de la croissance d'une population bactérienne, montrer qu'il s'agit d'une équation linéaire homogène à coefficients constants et retrouver la solution.
- Reprendre l'exercice des frottements visqueux, montrer qu'il s'agit d'une équation linéaire homogène à coefficients constants et retrouver la solution (on pourra poser $V = v - v_\infty$ et trouver une équation vérifiée par V).

Principe de superposition et équation inhomogène

Dans le cas d'une équation linéaire inhomogène (E):

$$a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) + \cdots + a_n(x)f^{(n)}(x) = b(x)$$

et de l'équation homogène associée (E_0):

$$a_0(x)f(x) + a_1(x)f'(x) + \cdots + a_n(x)f^{(n)}(x) = 0$$

Le principe de superposition s'applique différemment.

- Soit f_0 une solution particulière de (E)
- Soit f_1 une solution de (E_0)

Alors $f = f_0 + f_1$ est solution de (E).

Équation linéaire inhomogène à coefficients constants

Pour résoudre une équation linéaire inhomogène à coefficients constants (E), on procède donc en trois temps:

- on commence par chercher une solution particulière f_0 de (E) (souvent simple ou évidente, par exemple un état d'équilibre en physique)
- on cherche ensuite la solution de générale de (E_0), sous la forme $\alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_n f_n$
- on ajoute les deux et on détermine les coefficients α_i à l'aide des conditons limites.

Exemple important: phénomène oscillant

Les équations différentielles d'ordre 2 sont très importantes en physique: elles interviennent systématiquement dans l'étude de système oscillants.

On considère par exemple une masse pnctuelle m fixée à un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k. Le ressort est fixée au plafond en un point (origine des positions, avec un axe dirigé vers le bas) et on note $l(t)$ la position de la masse au temps t (qui correspond également à la longueur du ressort au temps).

En faisant un bilan des forces (cf cours de physique), on a:

$$m\frac{d^2l}{dt^2} = mg - k(l - l_0)$$

Phénomène oscillant (II)

L'équation peut se réécrire sous la forme:

$$\frac{d^2 l}{dt^2} + \frac{k}{m} l = g + \frac{k}{m} l_0$$

qui n'est pas homogène.

On cherche donc une solution particulière simple, par exemple constante (pour annuler le terme $\frac{d^2 l}{dt^2}$). La fonction constante $l(t) = l_0 + \frac{mg}{k}$ est solution (et correspond à un état d'équilibre). On note l_{texteq} cette solution et on décrit le système en fonction de $L = l - l_{texteq}$. En injectant dans (E), on montre que L vérifie l'équation homogène

$$\frac{d^2 L}{dt^2} + \frac{k}{m} L = 0$$

Phénomène oscillant (III)

L'équation caractéristique associée est

$$r^2 + \frac{k}{m} = 0$$

dont les solutions sont $r_1 = i\sqrt{k/m}$ et $r_2 = -i\sqrt{k/m}$. En notant $\omega = \sqrt{k/m}$, notre base est donc donnée par le couple de fonctions

$$f_1(t) = e^{i\omega t} \qquad f_2(t) = e^{-i\omega t}$$

C'est correct mais pas forcément interprétable… Cherchons une base plus intuitive.

Phénomène oscillant (IV)

On se rappelle que si (f_1, f_2) est une base, alors $(e_1, e_2) = ((f_1 + f_2)/2, (f_1 - f_2)/2)$ aussi. Dans notre cas, on adopte donc la nouvelle base

$$e_1(t) = \frac{f_1(t) + f_2(t)}{2} = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = \cos(\omega t)$$
$$e_2(t) = \frac{f_1(t) - f_2(t)}{2} = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2} = \sin(\omega t)$$

Notre solution générale peut donc s'écrire sous la forme

$$L(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$$

Ou en se rappelant du cours de début d'année:

$$L(t) = R\cos(\omega t + \phi)$$

Phénomène oscillant (V)

Les deux formulations précédentes sont **équivalentes** mathématiquement et dépendent de deux paramètres chacune mais correspondent à des interprétations différentes.

Pour déterminer R et phi, on se donne des conditions initiales. Supposons que le ressort est laché *sans vitesse initiale* et avec un *allongement initial nul*. On a

- $l(0) = l_0 \Leftrightarrow L(0) = A\cos(0) + B\sin(0) + l_{\mathrm{eq}} = l_0$
- $l'(0) = 0 \Leftrightarrow L'(0) = -A\omega\sin(0) + B\omega\cos(0) = 0$

d'où on déduit $A = l_0 - l_{\mathrm{eq}}$ et $B = 0$. La solution de notre équation est donc:

$$L(t) = (l_0 - l_{\mathrm{eq}})\cos(\omega t) \Leftrightarrow l(t) = l_{\mathrm{eq}} + (l_0 - l_{\mathrm{eq}})\cos(\omega t)$$