Nombres complexes

Mahendra Mariadassou

30 Septembre 2019

Introduction

Plan de la leçon

- L'ensemble $\mathbb{C}$
- Exponentielle complexe
- Applications à la trigonométrie
- Équations dans $\mathbb{C}$ (ensemble, en classe)

Objectifs

- Manipuler des nombres complexes (addition, multiplication)
- Choisir entre forme algébrique et forme exponentielle
- Avoir une visio géométrique de $\mathbb{C}$
- Connaître les formules de Moivre et d'Euler
- Savoir retrouver les égalités trigonométriques
- Trouver une racine carré dans $\mathbb{C}$.

Les nombres complexes

Définition et généralités

On admet l'existence de $\mathbb{C}$ défini par le théorème suivant:

L'ensemble $\mathbb{C}$ contient tous les réels ainsi qu'un nombre, noté i qui vérifie $i^2 = -1$. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que:

$$z = a + i \times b$$

Tout nombre réel x s'écrit alors

$$x = x + i \times 0$$

Les nombres complexes s'additionnent et se manipulent de la façon suivante: pour tous réels a, a', b, b' on a

$$\begin{aligned}(a + ib) + (a' + ib') &= (a + a') + i(b + b')\\(a + ib) \times (a' + ib') &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b)\end{aligned}$$

Terminologie

L'écriture d'un complexe z sous forme $z = a + ib$ (avec a et b **réels**) est dite *écriture sous forme algébrique* (ou *cartésienne*), par opposition à la forme exponentielle introduite plus tard.

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe

- Le nombre a s'appelle *partie réelle* de z et se note $Re(z)$
- Le nombre b s'appelle *partie imaginaire* de z et se note $Im(z)$

Complexe conjugué

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. On appelle *nombre complexe conjugué*, noté $\bar{z}$, le complexe

$$\bar{z} = a - ib$$

Remarques - Un complexe z est un réel si et seulement si $Im(z) = 0$. - Un complexe z dont la partie réelle est nulle ($Re(z) = 0$) est dit *imaginaire pur*. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs.

Conjugaison, réels et imaginaire purs

Soit z, z' deux nombres complexes

- On a $z + \bar{z} = 2Re(z)$ et $z - \bar{z} = 2iIm(z)$
- z est réel pur si et seulement si $z = \bar{z}$ et imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$
- $Re(z + z') = Re(z) + Re(z')$ et $Im(z + z') = Im(z) + Im(z')$
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $Re(\lambda z) = \lambda Re(z)$ et $Im(\lambda z) = \lambda Im(z)$. Ce n'est pas vrai en général si $\lambda \in \mathbb{C}$.

Opérations sur les complexes

On a les mêmes règles d'opérations dans $\mathbb{C}$ que dans C (et même un peu plus avec la conjugaison)

Soit z, z', z'' trois nombres complexes:

- $z + z'$ = $z' + z$ et $zz' = z'z$
- $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$ et $z(z'z'') = (zz')z''$
- $z + 0 = z$, $z \times 1 = z$ et $z \times 0 = 0$
- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$ et $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
- $z \times (z' + z'') = zz' + zz''$
- Si $z = a + ib$ sous forme algébrique, $z\bar{z} = a^2 + b^2$
- Si $z = a + ib \neq 0$, $z^{-1} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

Écriture algébrique: exercices

Écrire sous forme algébrique les complexes suivants:

- $z_1 = (2 - i)(4 + 2i)$
- $z_2 = \frac{z_1}{2+i}$
- $z_3 = \overline{z_1 z_2}$

Interprétation géométrique

On peut voir un nombre complexe z comme un couple (a, b) de nombres réels. On peut donc représenter les complexes comme des points dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point de coordonnées (a, b) dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On associe à M le nombre complexe $z_M = a + ib$. z_M est appelé *affixe (complexe)* du point M.
Réciproquement, à tout complexe $z = a + ib$, on peut associer son *point image* $M(z) \in \mathcal{P}$ de coordonnées (a, b).
Enfin, si $\vec{\alpha}$ est un vecteur du plan de coordonnées (a, b), on lui associe son *affixe complexe* $z_{\vec{\alpha}} = a + ib$.

Pour les propriétés qui suivent, faites des dessins pour les visualiser.

Interprétation géométrique (II)

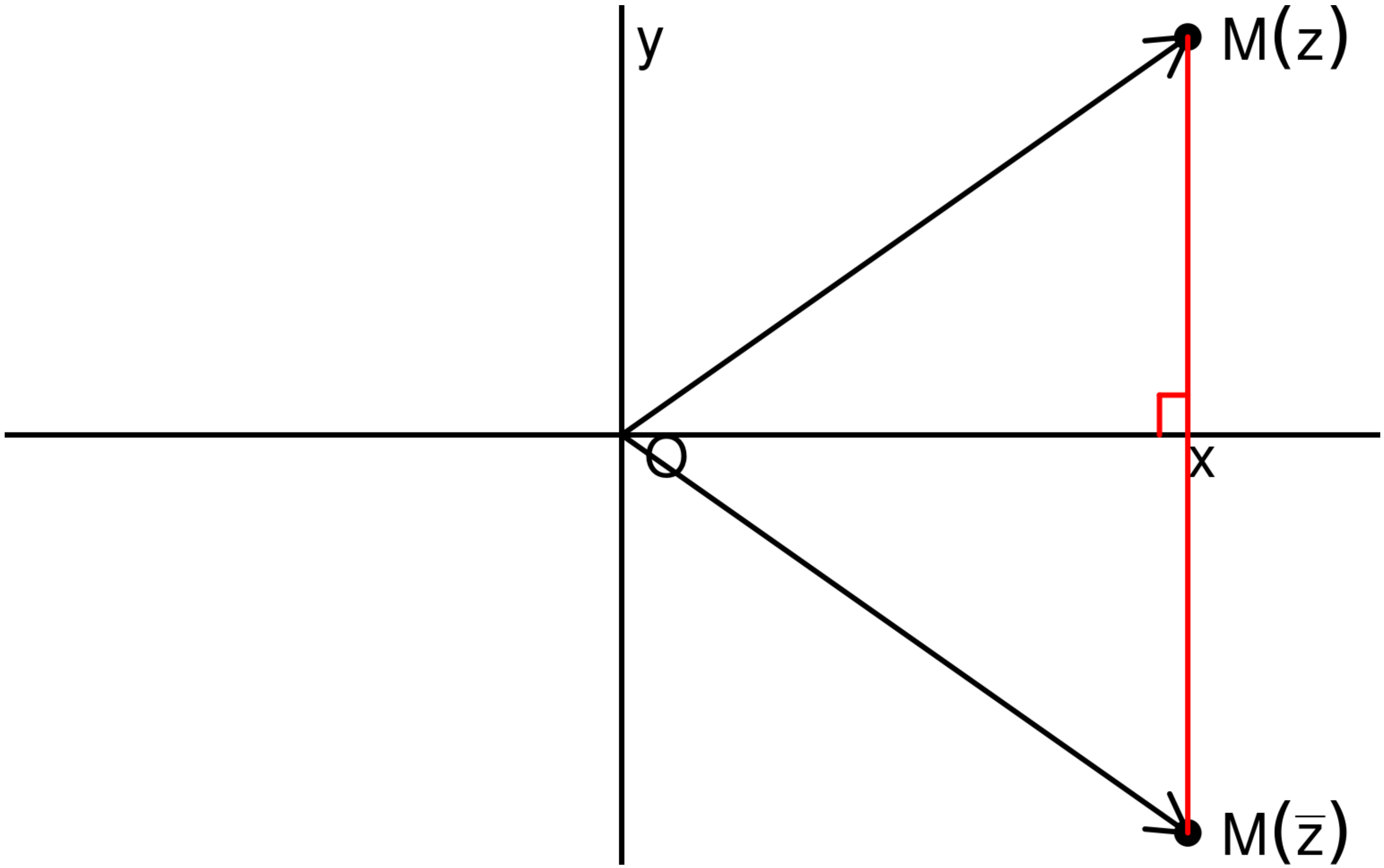
Soit A, B deux points du plan, on a

$$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$$

Avec les notation des deux propositions précédentes

- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow M(z)$ est sur l'axe des abscisses
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow M(z)$ est sur l'axe des ordonnées
- Soit $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ d'affixes respectives z_α et z_β. Le complexe $z_\alpha + z_\beta$ est l'affixe de $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$. Autrement dit, $z_{\alpha+\beta} = z_\alpha + z_\beta$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M(z)$ son point image. Alors le point $M(\bar{z})$, image de $\bar{z}$ est l'image de $M(z)$ par la symmétrie d'axe (Ox)

Interprétation géométrique du conjugué



Interprétation géométrique: exercices

Soit A, B et C 3 points distincts du plan d'affixes a, b et c. Montrer que
:

- A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{b-a}{c-a} \in \mathbb{R}$
- Le triangle ABC est rectangle en A si et seulement si $Re((b-a)(\overline{c-a})) = 0$

Dans les deux cas, on pourra faire un dessin pour avoir une intuition géométrique des conditions (vecteurs colinéaires ou perpendiculaires) et essayer de les traduires en termes de condition sur les nombre complexes.

Module d'un complexe

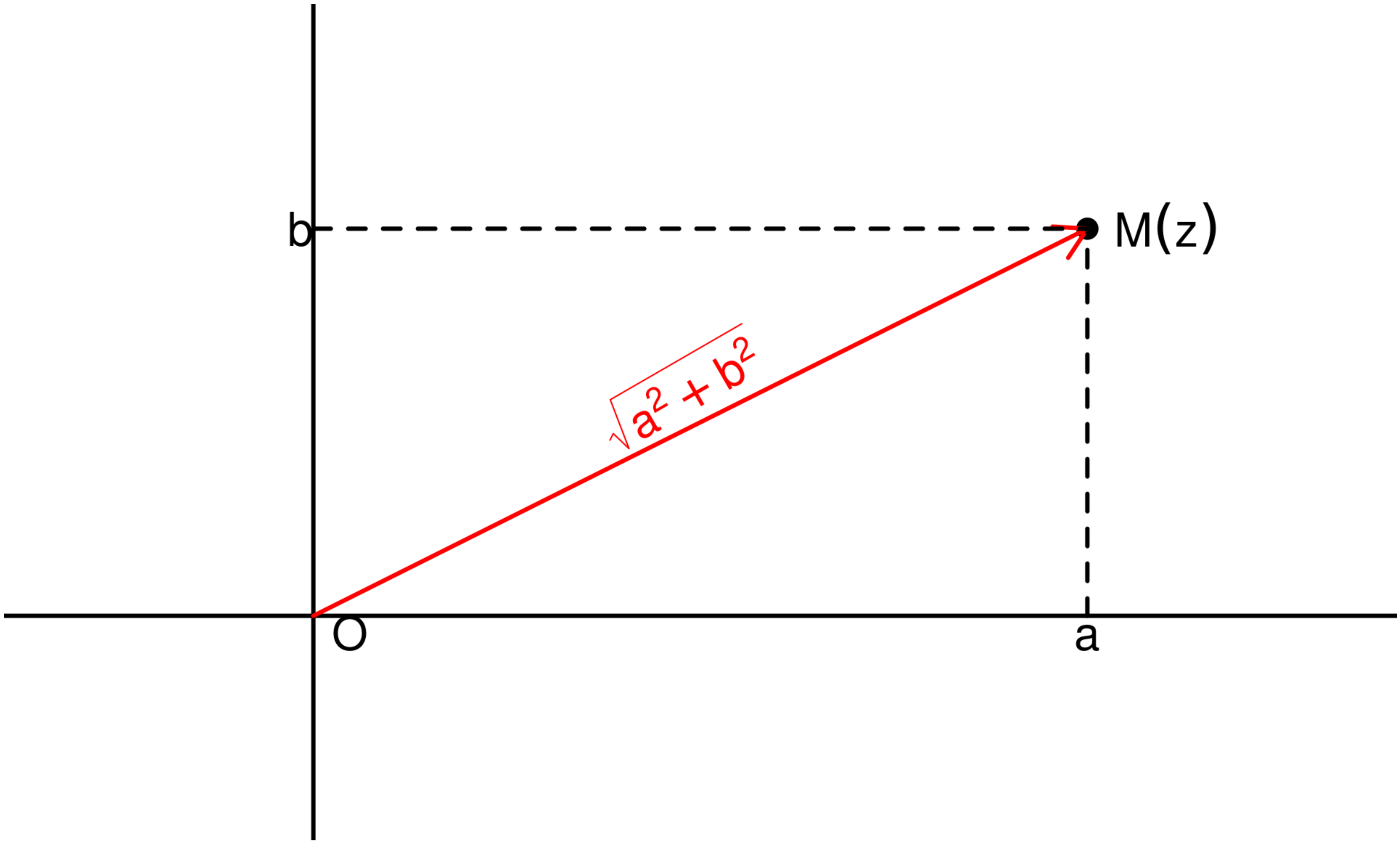
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. Le *module* de z, noté $|z|$ est la distance entre le point O (d'affixe 0) et le point $M(z)$ (d'affixe z), c'est à dire

$$|z| = OM(z) = \sqrt{a^2 + b^2}$$

De même, si z est l'affixe d'un vecteur $\vec{\alpha}$, alors $|z| = ||\vec{\alpha}||$ où $||\vec{\alpha}||$ désigne la *norme* du vecteur $\vec{\alpha}$.

Le module est la généralisation à $\mathbb{C}$ de la valeur absolue sur $\mathbb{R}$. C'est pour ça qu'on utilise la même notation.

Module d'un complexe: géométrie



Module d'un complexe: propriétés

Soit z, z' deux complexes d'image $M(z)$ et $M(z')$.

- $|z| \geq 0$
- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z| \geq |Re(z)|$ avec égalité si et seulement si $z \in \mathbb{R}$
- $|z| \geq |Im(z)|$ avec égalité si et seulement si $z \in i\mathbb{R}$
- $|z| = |\bar{z}|$, $z\bar{z} = |z|^2$
- $|zz'| = |z||z'|$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $|z^n| = |z|^n$
- $|z - z'| = \|\overrightarrow{M(z)M(z')}\|$

Module d'un complexe: exercices

On rappelle que la sommes de **réels positifs** est nulle si et seulement si tous ces réels sont nuls:

$$\forall(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, x_1 + \cdots + x_n = 0 \Leftrightarrow x_1 = \ldots x_n = 0$$

- Démontrer les inégalités et égalités de la proposition précédente (en passant par les formes algébriques de z et z').
- Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z - i| = |z + i|$ (on peut essayer d'avoir une interprétation géométrique pour cet exercice)
- Déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que z, $1/z$ et $1 - z$ ont le même module (on peut essayer de déterminer $|z|$ avant d'avoir une interprétation géométrique)

Inégalité triangulaire

Soit z et z' deux complexes. On a

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Inégalité triangulaire: preuve géométrique

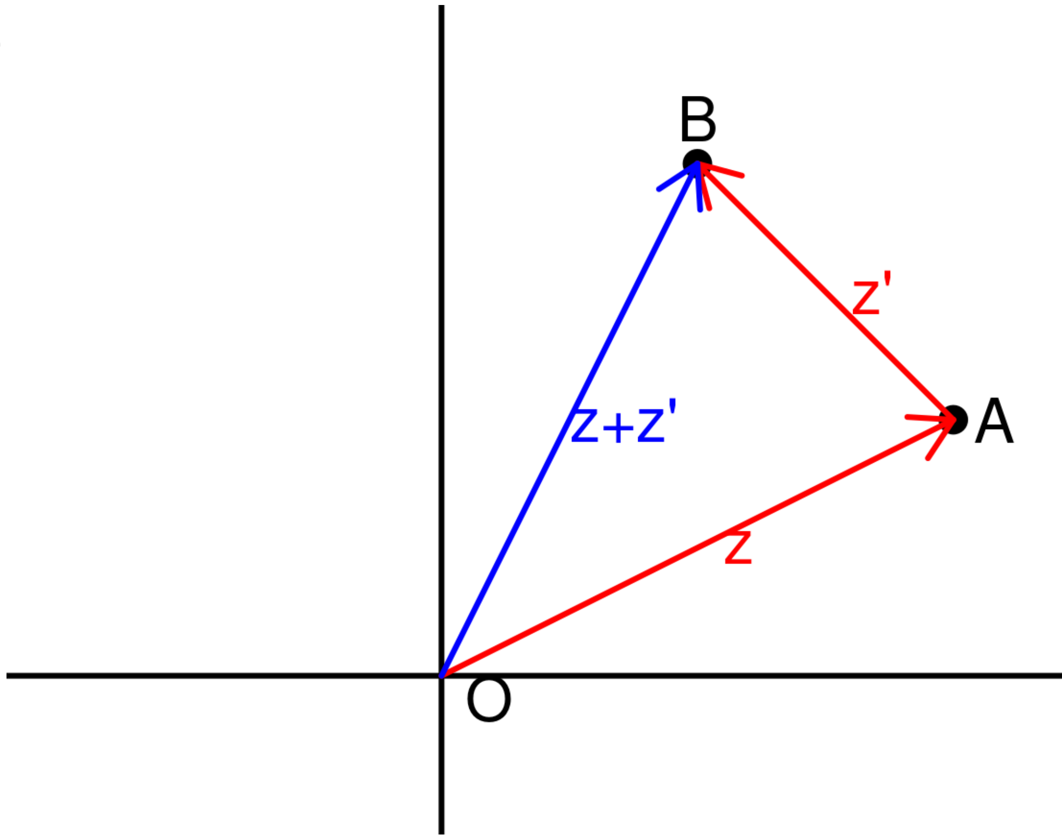
Soit O le point d'affixe 0, A celui d'affixe z et B celui d'affixe $z+z'$.

L'inégalité triangulaire dans le triangle ABO donne

$$OB \leq OA + AB$$

Or $OB = |z+z'|$, $OA = |z|$ et $AB = |z'|$ donc on a bien

$$|z+z'| \leq |z| + |z'|$$



Exponentielle complexe

Nombres complexes de module 1

L'ensemble des nombres complexes de module 1 se note $\mathbb{U}$. Il correspond géométriquement à l'ensemble des affixes des points du *cercle unité* (de centre O et de rayon 1).

Soit z un nombre de complexe de module 1, il existe un réel θ (en fait une infinité) tel que

$$z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

C'est immédiat avec ce qu'on a vu en trigonométrie. Comme $z = a + ib$ est de module 1 on a $a^2 + b^2 = 1$ et a et b peuvent donc s'écrire comme le $\cos$ et le $\sin$ d'un angle θ bien choisi.

Argument d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe non nul. Le nombre $z/|z|$ est de module 1. On appelle *argument* de z, noté $\arg(z)$ tout nombre θ tel que

$$\frac{z}{|z|} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Remarques - Il y a une **infinité** d'arguments, l'argument n'est défini qu'à 2π près. - On parle d'**un** argument, pas de **l'**argument d'un complexe - Si on se restreint à un intervalle I de longueur 2π (par exemple $]-\pi, \pi]$), l'argument est bien unique dans I.

Argument d'un nombre complexe: propriété

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls. On note θ (resp. θ') un argument de z (resp. de z')

- $\theta + \theta'$ est un argument de zz'
- $-\theta$ est un argument de $1/z$ et de $\bar{z}$
- $\theta - \theta'$ est un argument de z/z'. Si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\overrightarrow{u'}$ ont pour affixe z et z', alors $\arg(z/z')$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{u'})$

Lien avec les rotations

On rappelle que la rotation $R(O,\alpha)$ est l'application de $\mathcal{P} \to \mathcal{P}$ qui à tout point M associe le point M' qui vérifie: - $OM = OM'$ - $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \alpha$

On sait que $\mathcal{P}$ est identifié à $\mathbb{C}$. On peut donc se demander s'il existe un lien entre l'affixe z de M et celle z' de M'.

La réponse est oui. Si z_α est un nombre complexe tel que $|z_\alpha| = 1$ et que α est un argument de z_α, alors $z' = z_\alpha z$. Autrement dit, multiplier par un nombre complexe de module 1 et d'argument α revient à faire une rotation de centre O et d'angle α sur les images.

Argument: exercices

- Écrire sous forme algébrique $z = \frac{1+i}{a+ib}$ où $(a, b) \neq (0, 0)$ est un couple de réels.
- Écrire sous forme algébrique et trouver un argument et le module de $z_1 = \frac{-4}{1+i\sqrt{3}}$ et $z_2 = (1+i)^3$
- Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants:

$$z_0 = i\sin(3\pi/8), z_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2}, z_2 = 1+i, z_3 = \frac{z_1}{z_2}$$

Exponentielle complexe

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Soit $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{i\theta + i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$$

Remarques La définition de $e^{i\theta}$ peut sembler arbitraire mais la proposition précédente montre que c'est la “bonne” définition: c'est celle qui étend les propriétés de l'exponentielle des réels purs aux imaginaires purs.

Exponentielle complexe et conjugaison, argument

Soit $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{\rho e^{i\theta}} = \rho e^{-i\theta}$$

Soit z un complexe non nul et θ un réel. θ est un argument de z si et seulement $z = |z| e^{i\theta}$

Soit z un complexe non nul. Il existe un couple $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$ tel que

$$z = \rho e^{i\theta}$$

- **Remarque** Il existe une infinité de (ρ, θ) mais ils sont liés les uns aux autres, comme le montre la proposition suivante.

Forme exponentielle

Soit z, z' deux nombres complexes non nuls tels que

$$z = \rho e^{i\theta} \text{ et } z = \rho' e^{i\theta'} \text{ avec } \rho, \rho' > 0$$

Alors, on a

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \rho' \\ \exists k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \theta' = \theta + 2k\pi \end{cases}$$

- Si θ et θ' sont distincts dans $[0, 2\pi[$ (ou n'importe quel intervalle de longueur 2π), alors $e^{i\theta} \neq e^{i\theta'}$
- Soit $z \in \mathbb{C}$, non-nul et $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^\star \times \mathbb{R}$. Alors $z = \rho e^{i\theta}$ si et seulement si $|z| = \rho$ et θ est un argument de z. Cette notation s'appelle la *forme exponentielle* de z.

Exponentielle complexe

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe sous forme algébrique. On pose

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

Soit z, z' deux nombres complexes et $n \in \mathbb{Z}$. On a:

- $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$

Remarques La définition et la proposition montre que l'exponentielle complexe étend bien l'exponentielle réelle de façon cohérente sur $\mathbb{C}$ (on l'avait déjà vu pour $i\mathbb{R}$)

Exponentielle complexe (II)

Soit z un nombre complexe.

- $|e^z| = e^{Re(z)}$
- $e^z = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z = 2ik\pi$

Remarque Contrairement aux nombres réels positifs, z^x n'est pas bien défini quand z est complexe (alors que pour $a > 0$, on a $a^x = e^{x\ln(a)}$). On retiendra donc que z^x (avec z complexe) n'est bien défini **que pour** $x \in \mathbb{Z}$.

Exponentielle complexe: exercices

Dans les exercices suivants, l'objectif est de se ramener à des sommes connues (Sommes des termes d'une suite géométrique, Binôme de Newton). On peut par exemple essayer de calculer $A_n + iB_n$ avant d'isoler ses parties réelles et imaginaires. On peut aussi noter que $\cos(k\theta) + i\sin(k\theta) = (e^{i\theta})^k$.

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$:

- $A_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$
- $A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$ et $B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta)$

Nombres complexes et trigonométrie

Application à la trigonométrie

On l'a vu dans la définition de l'exponentielle complexe mais il existe un lien fort entre les fonctions trigonométriques et l'exponentielle complexe. Ce lien est formalisé par les **formules d'Euler**

Soit θ un nombre réel. On a

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Un autre lien fort qui existe est la **formule de Moivre**:

Soit θ un nombre réel et $n \in \mathbb{Z}$. On a

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = (e^{i\theta})^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Application à la trigonométrie (II)

Il est plus aisé de retrouver les formules d'additions à partir de la définition de l'exponentielle complexe que de les apprendre par coeur. En effet:

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= Re(e^{i(a+b)}) = Re(e^{ia} \times e^{ib}) \\ &= Re((\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) \\ &\quad + i(\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b))) \\ &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\end{aligned}$$

On montre de même que

$$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$$

Toutes les autres formules en découlent.

Linéarisation

L'idée est d'exprimer $\cos^n(x)\sin^p(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $n, p \in \mathbb{N}$ en fonction des $\cos(kx)$ et des $\sin(kx)$. Pour ce faire on utilise les formules d'Euler.

On commence par écrire

$$\cos^n(x)\sin^p(x) = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n \left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^p$$

Ensuite, on développe (en utilisant le binôme de Newton) et on utiliser les formules d'Euler dans l'autre sens pour simplifier.

Linéarisation: Exemple

On chercher à linéariser $\cos^3(x)$

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{i2x}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-i2x} + e^{-i3x}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x}\right) \\
&= \frac{1}{8}\left(e^{i3x} + e^{-i3x} + 3(e^{ix} + e^{-ix})\right) \\
&= \frac{1}{8}(2\cos(3x) + 6\cos(x)) = \frac{1}{4}(3\cos(x) + \cos(3x))
\end{aligned}$$

Transformation de $\cos(nx)$

C'est la transformation inverse de la précédente. On veut exprimer $\cos(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Pour cela, on applique la formule de Moivre:

$$
\begin{aligned}
\cos(nx) &= Re(\cos(nx) + i\sin(nx)) \\
&= Re((\cos(x) + i\sin(x))^n)
\end{aligned}
$$

Il suffit alors de développer en utilisant le binôme de Newton et de ne garder que la partie réelle.

Transformation de $\cos(nx)$: exemple

Pour $n = 3$, on a

$$\begin{aligned}(\cos(x) + i\sin(x))^3 &= \cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) \\ &\quad - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x) \\ &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\ &\quad + i(3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x))\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\ \sin(3x) &= 3\cos^2(x)\sin(x) - \sin^3(x)\end{aligned}$$

Linéarisation, transformation: exemples

- Linéariser $\sin^4(x)$
- Exprimer $\cos(5x)$ en fonction de $\cos(x)$ (uniquement $\cos(x)$)

Recherche d’une raciné carrée dans $\mathbb{C}$

Calcul d'une racine carrée complexe

Soit Z un nombre complexe, on cherche à calculer une racine carrée de Z c'est à dire **un** nombre complexe z tel que $z^2 = Z$.

Comme dans $\mathbb{R}$, si z est solution, alors $-z$ mais contrairement à $\mathbb{R}$, on ne peut pas parler de **la** racine carrée puisque la condition $z > 0$ n'a **pas de sens** pour un complexe.

Racine carrée dans $\mathbb{C}$

Soit Z un nombre complexe **quelconque**. L'équation d'inconnue complexe z:

$$z^2 = Z$$

a **toujours** deux solutions (éventuellement confondues).
Si $Z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \geq 0$, ces deux solutions sont:

$$z_1 = \sqrt{\rho} e^{i\theta/2} \text{ et } z_2 = -z_1 = -\sqrt{\rho} e^{i\theta/2}$$

Si Z est donné sous forme algébrique, il faut faire plus d'efforts…

Calcul d'une racine carrée complexe: forme algébrique

Si Z est donné sous forme algébrique $Z = A + iB$ (avec A, B réels), on va chercher les racines carrés z sous forme algébrique $z = a + ib$ en utilisant 2 propriétés:

- $z^2 = Z$
- $|z|^2 = |Z|$

Calcul d'une racine carrée complexe: forme algébrique

La première ($z^2 = Z$) donne:

$$z^2 = A + iB \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2iab = A + iB$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 & = & A \\ 2ab & = & B \end{cases}$$

La deuxième ($|z|^2 = |Z|$) donne

$$a^2 + b^2 = \sqrt{A^2 + B^2}$$

Calcul d’une racine carrée complexe: forme algébrique

On peut résoudre le premier système:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & A \\ a^2 + b^2 & = & \sqrt{A^2+B^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2 & = & \sqrt{A^2+B^2} + A \\ 2b^2 & = & \sqrt{A^2+B^2} - A \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a & = & \pm\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}+A}{2}} \\ b & = & \pm\sqrt{\frac{\sqrt{A^2+B^2}-A}{2}} \end{cases}$$

On a donc 4 possibilités pour (a, b). Le signe de $B = 2ab$ permet de n’en conserver que deux des 4.

Calcul d'une racine carrée complexe: Exemple

On essaie de calculer les racines carrés de $5 - 12i$. Il n'y a pas de forme exponentielle intéressante pour ce complexe donc on passe par la forme algébrique. On cherche une racine carré $z = a + ib$ sous forme algébrique. On a d'une part:

$$z^2 = 5 - 12i \Leftrightarrow (a^2 - b^2) + 2iab = 5 - 12i$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 & = & 5 \\ 2ab & = & -12 \end{cases}$$

Et d'autre part $|z|^2 = a^2 + b^2 = |5 - 12i| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$.

Calcul d'une racine carrée complexe: Exemple

On doit donc résoudre le système:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = & 5 \\ a^2 + b^2 & = & 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 & = & 9 \\ b^2 & = & 4 \end{cases}$$

Qui donne $a = \pm 3$ et $b = \pm 2$. Comme $ab = 6 < 0$, les deux solutions sont:

$$z_1 = 3 - 2i \text{ et } z_2 = -3 + 2i$$

.

Trinôme de degré 2 dans C

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. On considère l'équation (E):

$$az^2 + bz + c = 0$$

. Cette équation est équivalente à l'équation suivante

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

où $\Delta = b^2 - 4ac$.
En notant α une racine carrée de Δ (qui existe toujours), les solutions de (E) sont:

$$z_1 = \frac{-b + \alpha}{2a} \text{ et } z_1 = \frac{-b - \alpha}{2a}$$

Remarque Contrairement aux équations de degré 2 dans $\mathbb{R}$, les équations de degré 2 dans $\mathbb{C}$ ont **toujours** deux solutions (potentiellement confondues).

Trinôme de degré 2 dans C: racines

Avec les notations précédentes, on a $z_1 z_2 = c/a$ et $z_1 + z_2 = -b/a$

Remarques

- La proposition précédente est utile pour trouver des nombres dont on connaît la **somme** S et le **produit** P: il suffit de trouver les racines du polynôme $X^2 - SX + P$.
- Un usage plus pragmatique consiste à vérifier vos calculs: une fois trouvées les deux racines d'un trinôme en passant par le discriminant, vous pouvez vérifier leur cohérence avec la proposition précédente.
- Un autre usage pragmatique consiste à accélérer les calculs: si vous trouvez une racine évidente z_1, l'autre est forcément égale à $c/(az_1)$. Par exemple 1 est racine évidente de $X^2 - 3X + 2$, l'autre est forcément 2.

Exercices

La Places des Vosges a une superficie de 19600 m^2 et un périmètre de 560 mètres. Quelles sont ses dimensions?

On note l et L les dimensions la place. D'après l'énoncé $lL = 19600$ et $2(l + L) = 560$ donc $l + L = 280$. On sait que l et L sont solutions de l'équation (d'inconnue x):

$$(x - l)(x - L) = 0$$

Cette équation peut se réécrire

$$x^2 - (l + L)x + lL = 0$$

Exercices

En substituant avec les valeurs de l'énoncé, l et L sont solutions de l'équation

$$x^2 - 280x + 19600 = 0$$

En résolvant, on obtient $l = L = 140$. On pourrait pu aller plus vite en utilisant l'information que la place des Vosges est carrée…