

## Partiel de mathématiques (partie logique)

### 1 Ensembles

Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles. Démontrer l'équivalence :

$$A \cup B = A \cap B \iff A = B$$

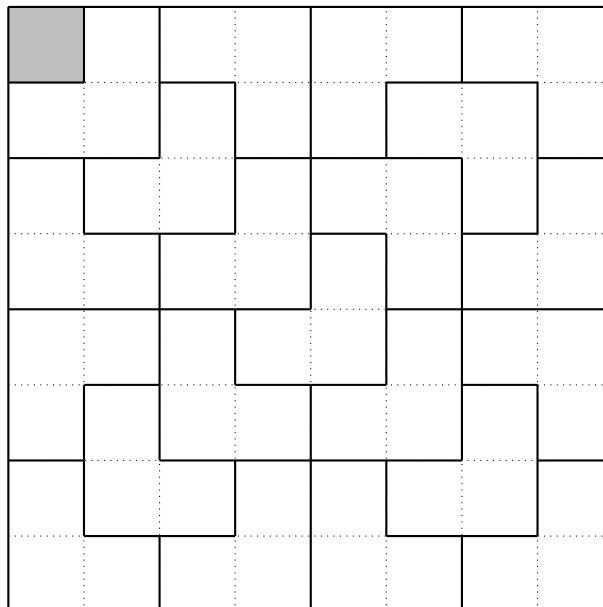
### 2 Récurrence

1. Étudier le signe de  $(x + 1)(x^2 - x - 1)$  en fonction de  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on définit la factorielle de  $n$ , notée  $n!$ , par :

$$n! = 1 \times 2 \times \cdots \times (n - 1) \times n$$

Montrer par récurrence que pour tout  $n \geq 4$ ,  $n! \geq n^2$ . On pourra utiliser la question précédente.

3. Soit  $P(n)$  le prédicat affirmant qu'« une grille de taille  $2^n \times 2^n$  peut être recouverte de tuiles en forme de L de façon à ce que toutes les cases soient recouvertes, excepté celle du coin supérieur gauche. » Voici un exemple d'un tel pavage pour  $n = 3$ , avec une grille de taille  $8 \times 8$  :



Montrer par récurrence que  $P(n)$  est vrai pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## Partiel de Mathématiques (partie analyse)

Tous les exercices sont indépendants. Les réponses doivent être justifiées (éventuellement de façon concise) : les réponses (même correctes) non-justifiées ne donneront lieu à **aucun point**. Le barème est donné à titre **indicatif**.

### Exercice 1 : Puissance de nombre complexe, 2 points

On pose  $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Calculez  $z^{2020}$ .

### Exercice 2 : Limites, 4 points

Calculez :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{\tan(x)} - \sqrt{1-x}}{x^3}$$

### Exercice 3 : DL, 4 points

Trouver  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2} = o(x^n)$$

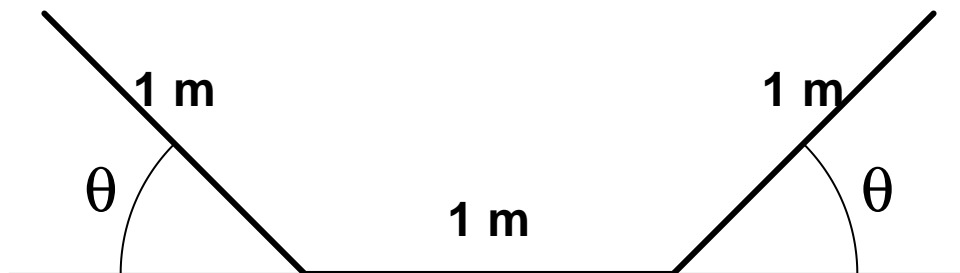
avec  $n$  maximal. (Indice : On peut écrire le DL de  $f(x)$  en 0 en fonction de  $a$  et  $b$  et chercher les valeurs qui annulent le maximum de coefficients dans ce DL).

### Exercice 4 : Plan complexe, 3 points

Trouvez l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $Z = (1+z)(i+\bar{z})$  soit réel. On exprimera cet ensemble comme un élément géométrique du plan complexe  $\mathbb{C}$ .

### Exercice 5 : Bassine, 7 points

On considère une tôle de métal rectangulaire de  $l = 3$  mètres de large et  $L = 5$  mètres de long. On plie la tôle de métal dans sa largeur comme suit (vue de coupe) pour former une bassine de  $L$  mètres de long :



Les faces avant et arrière sont fermées, indépendamment de  $\theta$ . Quelle est la valeur de  $\theta$  qui maximise le volume de la bassine ? Quel est le volume correspondant ?

### Exercice 6 : Concombre, 2 points bonus

Un concombre frais a un taux d'humidité de 99% (c'est à dire que la matière sèche forme 1% de la masse du concombre et l'eau 99% de sa masse). Le concombre se dessèche (il perd de l'eau) jusqu'à atteindre un taux d'humidité de 98%. Quelle fraction de sa masse a-t-il perdu en se desséchant.