8 décembre 2020

Partiel de Mathématiques (partie analyse)

Tous les exercices sont indépendants. Les réponses doivent être justifiées (éventuellement de façon concise) : les réponses (même correctes) non-justifiées ne donneront lieu à **aucun point**. Le barème est donné à titre **indicatif**.

Exercice 1 : Puissance de nombre complexe, 2 points
On pose $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Calculez z_1^{2020}.
On commence par écrire z_1 sous forme exponentielle : $z_1 = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = e^{i\pi/3}$. On a donc $z_1^{2020} = e^{i\frac{2000\pi}{3}} = e^{i\frac{(333\times 6+2)\pi}{3}} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+333\times 2\pi\right)} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2 : Limites, 4 points
Calculez :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{\tan(x)} - \sqrt{1-x}}{x^3}$$

Remarque : Cet exercice était plus difficile que prévu intentionnellement (il nécessite à priori un DL de $\tan(x)$ et $\cos(x)$ à l'ordre 4) et a été noté en bonus dans le calcul final.
On commence par analyser l'expression : le dénominateur est en x^3 donc il faut trouver le premier terme non-nul d'ordre ≤ 2 ou aller jusqu'à l'ordre 3 pour se ramener à une forme déterminée conclure.
On commence par le terme facile en $\sqrt{1-x}$. Il s'agit d'une fonction classique pour laquelle on a :

$$\sqrt{1-x} = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 + o(x^3)$$

Il faut ensuite passer à la fraction $\frac{\ln(1+x)}{\tan(x)}$. On pourrait être tenté d'utiliser un DL à l'ordre 3 de $\ln(1+x)$ mais c'est insuffisant à cause de la division par $\tan(x) \sim x$ qui fait *perdre* un degré. Il faut donc écrire un DL à l'ordre 4 de $\ln(1+x)$ qui donne

$$\ln 1 + x = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

On écrit de même un DL à l'ordre 4 de $\tan(x)$ (un DL à l'ordre 3 ne suffit pas à priori à cause de la factorisation par le terme dominant en x au moment du passage à l'inverse), ce qui donne :

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Il n'y a pas d'erreur, le coefficient du terme en x^4 est nul (par imparité de $\tan(x)$) il s'agit donc bien d'un DL d'ordre 4. Il ne reste plus qu'à calculer un DL de $1/\tan(x)$. On commence par le terme dominant en facteur puis on utilise la méthode vue en cours :

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \underbrace{x^2/3 + o(x^3)}_{=u}} = \frac{1}{x}(1 - u + u^2 - u^3 + \dots)$$

Comme on cherche à avoir un terme de reste en $o(x^3)$ et que le terme dominant de u est en x^2, inutile de calculer les termes en u d'ordre supérieur à 2, ils seront intégrés au terme de reste en $o(x^3)$. On a donc

$$\frac{1}{\tan x} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{1 + \underbrace{x^2/3 + o(x^3)}_{=u}} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right)$$

En combinant cette expression avec le DL de $\ln(1+x)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{\tan(x)} &= \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x} \times \left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right)\\ &= \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + o(x^3)\right)\left(1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)\right)\\ &= 1 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12} + o(x^3)\end{aligned}$$

Et donc finalement pour le dénominateur

$$\begin{aligned}\frac{\ln(1+x)}{\tan(x)} - \sqrt{1-x} &= \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^3}{12}\right) - \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}\right) + o(x^3)\\ &= \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)\end{aligned}$$

En particulier, le coefficient du terme d'ordre est non-nul, ce qui nous permet de conclure :

$$\frac{\frac{\ln(1+x)}{\tan(x)} - \sqrt{1-x}}{x^3} = \frac{\frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{48} + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{8x} - \frac{1}{48} + o(1)$$

Cette expression n'admet pas de limite en 0 (mais tend vers $+\infty$ en 0^+ et $-\infty$ en 0^-)
Remarque : Il suffisait en fait de faire un DL à l'ordre 3 (plutôt que 4) de $\tan(x)$ et $\ln(1+x)$ pour résoudre l'exercice puisque le coefficient du terme d'ordre 2 de $\frac{\ln(1+x)}{\tan(x)} - \sqrt{1-x}$ est non-nul. Mais on ne pouvait pas le savoir à l'avance, c'est pourquoi la correction montre calculer le DL d'ordre 3 qui permettra toujours de conclure, que les coefficients soient nuls ou non.

Exercice 3 : DL, 4 points
Touver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que, au voisinage de 0,

$$f(x) = \cos(x) - \frac{1 + ax^2}{1 + bx^2} = o(x^n)$$

avec n maximal. (Indice : On peut écrire le DL de $f(x)$ en 0 en fonction de a et b et chercher les valeurs qui annulent le maximum de coefficients dans ce DL).
On commence par écrire un DL de $\frac{1}{1+bx^2}$ en 0 en se servant de la méthode vue en cours pour obtenir :

$$\frac{1}{1+bx^2} = 1 - bx^2 + b^2x^4 - b^3x^6 + \dots$$

En multipliant par $(1 + ax^2)$, on obtient :

$$\frac{1+ax^2}{1+bx^2} = 1 + (a-b)x^2 + (b^2 - ab)x^4 + (ab^2 - b^3)x^6 + \dots$$

On peut ensuite injecter cette égalité dans l'expression de $f(x)$ pour obtenir :

$$f(x) = \left[-\frac{1}{2} - (a-b)\right]x^2 + \left[\frac{1}{4!} - (b^2 - ab)\right]x^4 - \left[-\frac{1}{6!} - (ab^2 - b^3)\right]x^6 + \dots$$

Pour annuler les coefficients du DL, il faut résoudre successivement le plus possible d'équations suivantes :

$$-\frac{1}{2} - (a - b) = 0$$
$$\frac{1}{4!} - (b^2 - ab) = 0$$
$$-\frac{1}{6!} - (ab^2 - b^3) = 0$$

Les deux premières équations donnent

$$\begin{cases} b - a = 1/2 \\ b(b-a) = 1/24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b - a = 1/2 \\ b = 1/12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5/12 \\ b = 1/12 \end{cases}$$

Quand on injecte ces valeurs dans le dernier coefficient, on obtient

$$-\frac{1}{6!} - (ab^2 - b^3) = -\frac{1}{720} + \frac{1}{288} \neq 0$$

On en déduit que $(a, b) = (-5/12, 1/12)$ et qu'une bonne approximation [1] de $\cos(x)$ est donnée par $\frac{1-5x^2/12}{1+x^2/12} = \frac{12-5x^2}{12+x^2}$

Exercice 4 : Plan complexe, 3 points

Trouvez l'ensemble des nombres complexes z tels que $Z = (1 + z)(i + \bar{z})$ soit réel. On exprimera cet ensemble comme un élément géométrique du plan complexe $\mathbb{C}$.

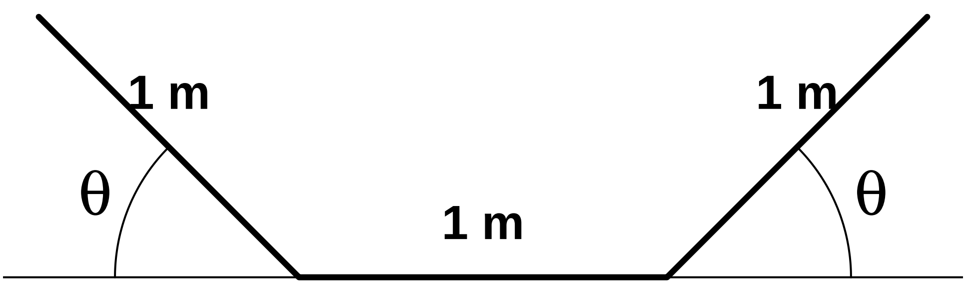
On écrit $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ et on note P l'ensemble des points qui vérifie la conidition. On raisonne par équivalence :

$$z \in P \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow \text{Im}((1 + x + iy)(x + i(1 - y))) = 0$$
$$\Leftrightarrow (1 + x)(1 - y) + yx = 0 \Leftrightarrow 1 + x - y = 0$$

P est donc fermé de l'ensemble des nombres complexes qui s'écrivent sous la forme $z = x + i(1 + x)$ avec $x \in \mathbb{R}$. Cet ensemble est assimilé à la droite d'équation $y = 1 + x$ dans le plan complexe.

Exercice 5 : Bassine, 7 points

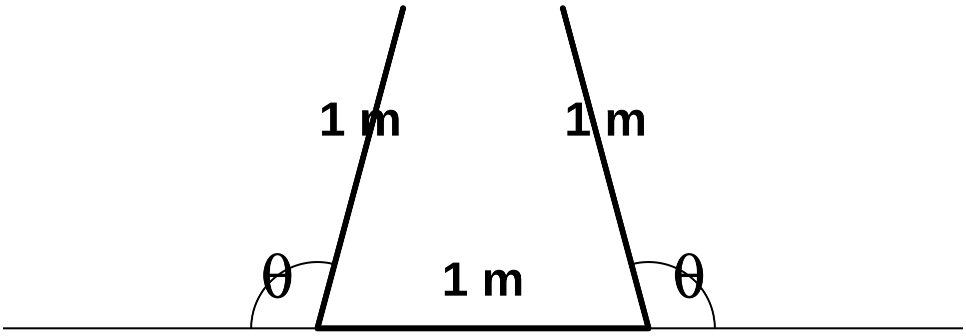
On considère une tôle de métal rectangulaire de $l = 3$ mètres de large et $L = 5$ mètres de long. On plie la tôle de métal dans sa largeur comme suit (vue de coupe) pour former une bassine de L mètres de long :



1. au sens où $\cos(x) - \frac{1-5x^2/12}{1+x^2/12} = o(x^5)$

Les faces avant et arrières sont fermées, indépendamment de θ. Quelle est la valeur de theta qui maximise le volume de la bassine ? Quel est le volume correspondant ?

Il faut à priori considérer toutes les valeurs de θ entre 0 et π. Par des considérations géométriques, on peut en fait se restreindre aux angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. En effet, si on considère un angle θ' supérieure à $\pi/2$, on peut tout de suite voir que l'angle $\theta = \pi/2$ (qui correspond à des bords vertivaux) permet d'obtenir une face avant de plus grande surface (et donc une bassine de plus grand volume)



On se restreind donc aux angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. La face avant peut-être décomposée en : 1 rectangle de longueur 1 et de hauteur $\sin(\theta)$ et 2 triangles rectangles de base $\cos(\theta)$ et de hauteur $\sin(\theta)$. La surface totale de la face avant est donc $S(\theta) = 1 \times \sin(\theta) + 2 \times \frac{\cos(\theta) \times \sin(theta)}{2} = \sin(\theta)(1 + \cos(\theta))$ et son volume est donc

$$V(\theta) = L \sin(\theta)(1 + \cos(\theta))$$

On cherche donc à maximiser la fonction $f : \theta \mapsto L \sin(\theta)(1 + \cos(\theta)$ sur $[0, \pi/2]$. f est dérivable de dérivée :

$$\begin{aligned} f'(x) &= L \cos(\theta)(1 + \cos(\theta)) + L \sin(\theta) \times (-\sin(\theta)) \\ &= L[\cos(\theta) + \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)] \\ &= L[2\cos^2(\theta) + \cos(\theta) - 1] \end{aligned}$$

Pour annuler la dérivée, on pose $X = \cos(\theta)$ et on cherche à résoudre $2X^2 + X - 1 = 0$ dans $\cos([0, \pi/2]) = [0, 1]$. Le calcul du discriminant montre que l'équation de degré 2 a pour racines $X = -1$ et $X = 1/2$. La seule solution dans $[0, 1]$ est donc $X = 1/2$ qui correspond à $\theta = \arccos(1/2) = \pi/3$. Les 3 points critiques de V sont donc $\theta = 0$ et $\theta = \pi/2$ (bornes du domaine d'étude) et $\theta = \pi/3$ (point d'annulation de la dérivée). On évalue V en chacun des 3 points :

$$V(0) = 0 \qquad V(\pi/2) = 1 \qquad V(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$$

Le volume de la bassine est donc maximum pour $\theta = \pi/3$ et vaut alors $V_{\max} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \simeq 1.3\, m^3$.

Exercice 6 : Concombre, 2 points bonus

Un concombre frais a un taux d'humidité de 99% (c'est à dire que la matière sèche forme 1% de la masse du concombre et l'eau 99% de sa masse). Le concombre se dessèche (il perd de l'eau) jusqu'à atteindre un taux d'humidité de 98%. Quelle fraction de sa masse a t-il perdu en se désséchant.

Notons m_0 la masse initiale totale du concombre, m_1 sa masse finale et m_s sa masse sèche. Avec ces notations, et comme la masse sèche n'est pas affecté, par le désséchement, les taux d'humidité initial (h_0) et final (h_1) sont donnés par $h_0 = 1 - m_s/m_0$ et $h_1 = 1 - m_s/m_1$. En particulier :

$$h_0 = 0.99 \Leftrightarrow m_s/m_0 = 0.01 \Leftrightarrow m_s = 0.01 m_0 \quad \text{et} \quad h_1 = 0.98 \Leftrightarrow m_s/m_1 = 0.02 \Leftrightarrow m_s = 0.02 m_1$$

À l'aide d'une règle de trois, on en déduit $m_1 = m_0/2$. Le concombre a donc perdu 50% de sa masse en séchant.